

Geometria

10 Lezioni dal 11 novembre al 3 febbraio 2026
UTE San Donato Milanese
Sergio SOLIMENA

INDICE 3

Provare a osservare lo spazio

Riassunto delle precedenti lezioni I e II

L'Infinito e gli Infinitesimi

- L'infinito nella cultura greca
- Paradosso della Molteplicità e del Movimento
- Achille raggiungerà la Tartaruga

Applicazione: Troviamo l'area del cerchio

Riassunto delle prime due lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- l'unità di misura
- Lo strumento di misura (il metro rigido, il quadrato, il cubo)
- La dimensione
- Metodi per misurare: uso del triangolo

Difficoltà

- Gli oggetti da misurare sono curvi (Lez. I, II, III)
- Gli strumenti di misura sono più lunghi o più corti dell'oggetto da misurare (Lez. I, II)
- Modifica dello strumento di misura: infinitesimi e infinito (Lez. II, III)
- Non basta misurare le lunghezze bisogna conoscere anche gli angoli. (Lez. I)

Riassunto delle prime due lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- L'Approssimazione
- Il Valor Medio, la Varianza e la Gaussiana
- Concetto di dimensione non intera: i frattali
- Metodo di esaustione
- Valutazione di π

Difficoltà

- Somme infinite (Lez. II, III)

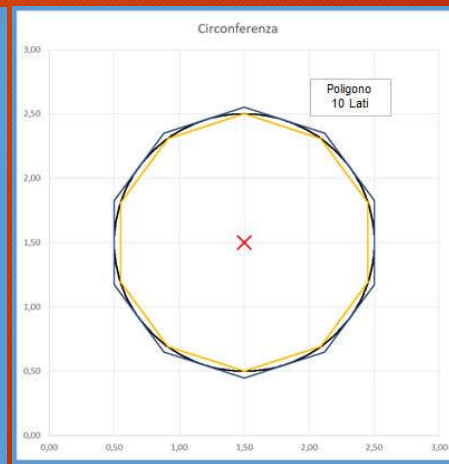
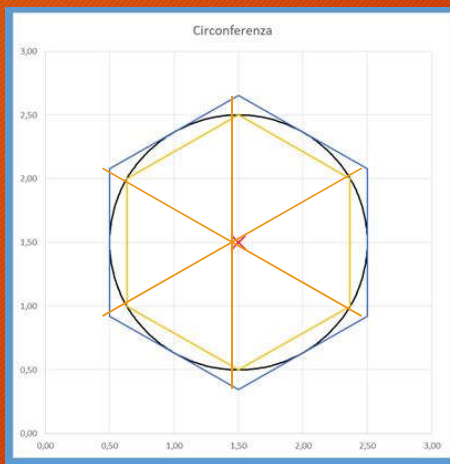
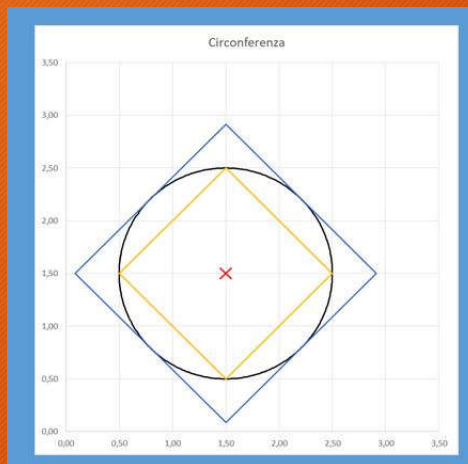
Breve riassunto:

- Il metodo di esaustione per il calcolo di *Pigreco*

π

La Misura: Misura di Pi Greco

- Approssimazione migliore della circonferenza:



La Misura: Misura di Pi Greco

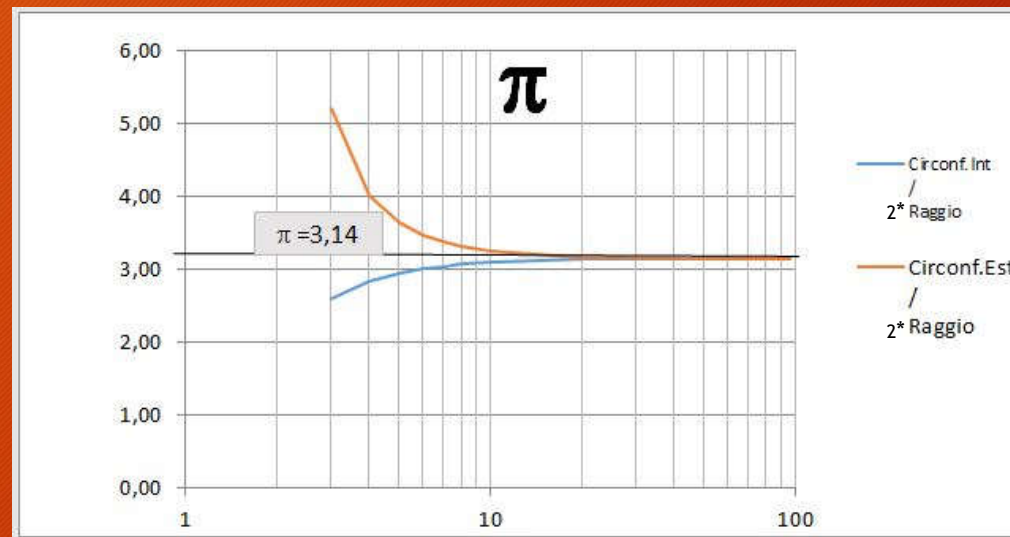
- a) Approssimazione:
 - Misura di pi greco.

Lati Poligono	Perimetro Inscritto (cm)	Perimetro Circoscritto (cm)	Area Inscritto (cm ²)	Area Circoscritto (cm ²)	Differenza Aree (cm ²)	Circonf.Int / 2*Raggio	Circonf.Est / 2*Raggio	Raggio Cerchio (cm)
3	5,1962	10,3923	1,2990	5,1962	3,8971	2,5981	5,1962	1
4	5,6569	8,0000	2,0000	4,0000	2,0000	2,8284	4,0000	1
5	5,8779	7,2654	2,3776	3,6327	1,2551	2,9389	3,6327	1
6	6,000	6,928	2,598	3,464	0,8660	3,000	3,464	1
7	6,074	6,742	2,736	3,371	0,6346	3,037	3,371	1
8	6,123	6,627	2,828	3,314	0,4853	3,061	3,314	1
10	6,180	6,498	2,939	3,249	0,3103	3,090	3,249	1
20	6,257	6,335	3,090	3,168	0,0775	3,129	3,168	1
96	6,282	6,285	3,139	3,143	0,0034	3,141	3,143	1

$$\frac{\text{Circonferenza}}{\text{Diametro}} = \frac{C}{(2 \cdot R)} = \pi$$

Approssimazione di π

- Calcolo di Archimede



LA CIRCONFERENZA

- LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA E':

$$C = \pi D = 2\pi R$$
$$= 3,14 D = 6,28 R$$

Fu calcolata da Archimede con una precisione che durò fino al 1600. Il valore di π fu calcolato utilizzando un poligono di 96 lati, con un metodo eccezionale valido ancora oggi.

π Lo troviamo ovunque. Nella misura delle lunghezze, delle superfici, dei volumi, negli angoli. Ogni volta che c'è una curvatura!

Proviamo a osservare lo Spazio: l'Infinito e gli Infinitesimi

Nella cultura greca:

L'INFINITO

Nasce come problema connaturato all'uomo e si pone però immediatamente sotto il segno dell'inconoscibilità, del mistero: per questo reca sgomento.

Non essere, Imperfezione, Mancanza di forma, Indeterminato.

La SFERA

E' la sfera il massimo simbolo di perfezione.

Il suo essere necessario, unico, compiuto, finito!

L perfezione è infatti paragonata a una "massa di una ben rotonda sfera«

(Parmenide: VI-V a.c.)-

(Aristotele, IV a.c.)

Dividiamo lo spazio...

Il metodo di Archimede

Mah.... Ma Ripartiamo dalla fine dell'ultima lezione.

Abbiamo visto come determinare π .

Per continue approssimazioni della Circonferenza con Poligoni aventi un numeri di lati sempre maggiore, tendente all'infinito

Dunque l'infinito non comporta solo imperfezione, indeterminazione.
Non causa solo angoscia

“NAUFRAGAR M E' DOLCE IN QUESTO MARE”. (L'infinito. G. Leopardi)

può portare anche serenità conoscenza

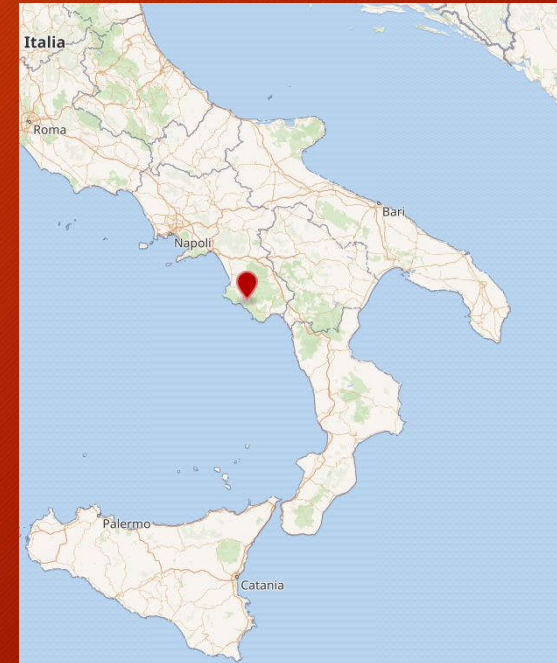
Partiamo allora dall'inizio!

I filosofi greci dell'Infinito e degli Infinitesimi

- Parmenide e Zenone di Elea

Nascono ad Elea un'antica polis della Magna Grecia. Nel comune di Ascea, in provincia di Salerno, all'interno del Parco nazionale del Cilento.

- Sono i maggiori filosofi del VI secolo a.c.



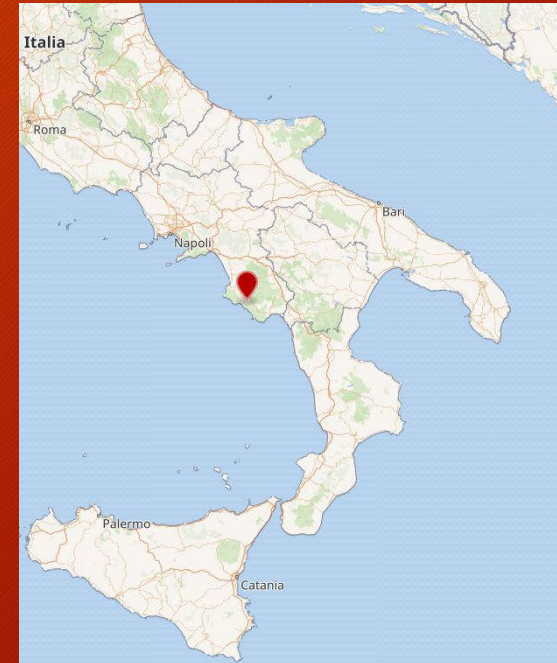
L'apparenza della Realtà, dell'Osservazione

- Parmenide e Zenone di Elea

«
Solamente l'essere uno ed immobile è reale.

Molteplicità e movimento sono semplicemente apparenza sensibile.

»



Il Paradosso

- Zenone di Elea usava il Paradosso, che è un ragionamento per assurdo, contrario all'opinione comune, che serve a dimostrare in modo indiretto una verità.

Se - Non A - è falsa allora - A - è vera.

Ecco come procede il ragionamento di Zenone

L'apparenza della Molteciplità

- Se le cose sono molteplici, fatte di parti, avendo carattere materiale, ciascuna cosa è estesa, continua e divisibile all'infinito.

Gli infiniti punti in cui le cose si risolvono o sono estesi o non hanno estensione

Nel primo caso cose costituite di infiniti punti estesi dotati di grandezza sarebbero infinitamente grandi, e nel secondo caso cose costituite di punti privi di estensione e grandezza avrebbero grandezza nulla

Solo l'unicità è vera

- Ne consegue che la molteplicità è falsa dato che
 - con i Punti di dimensione nulla la loro somma sarebbe nulla;
 - con punti di dimensione estesa la loro somma infinita darebbe un'estensione infinita.

In nessuno dei due casi otterremmo la lunghezza finita richiesta dalla loro molteplicità!

- Dato che la MOLTEPLICITA' (Non A) è FALSO allora l'UNITA' dell'essere è VERA

L'apparenza del Movimento

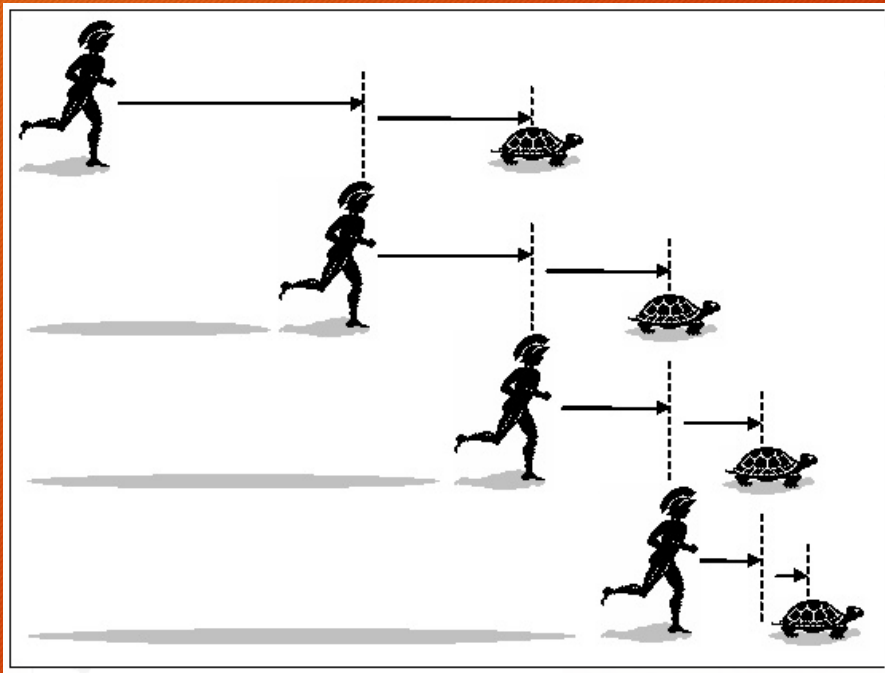
- Un ragionamento simile userà Zenone per negare il movimento.

Se le cose si muovono, essendo lo spazio ed il tempo divisibili all'infinito, una distanza AB può essere coperta soltanto coprendone prima almeno la metà, poi la metà della seconda metà e man mano la metà delle infinite e quindi inesauribili metà successive.

Da cui il Paradosso di Achille che non raggiungerà mai la lenta tartaruga.

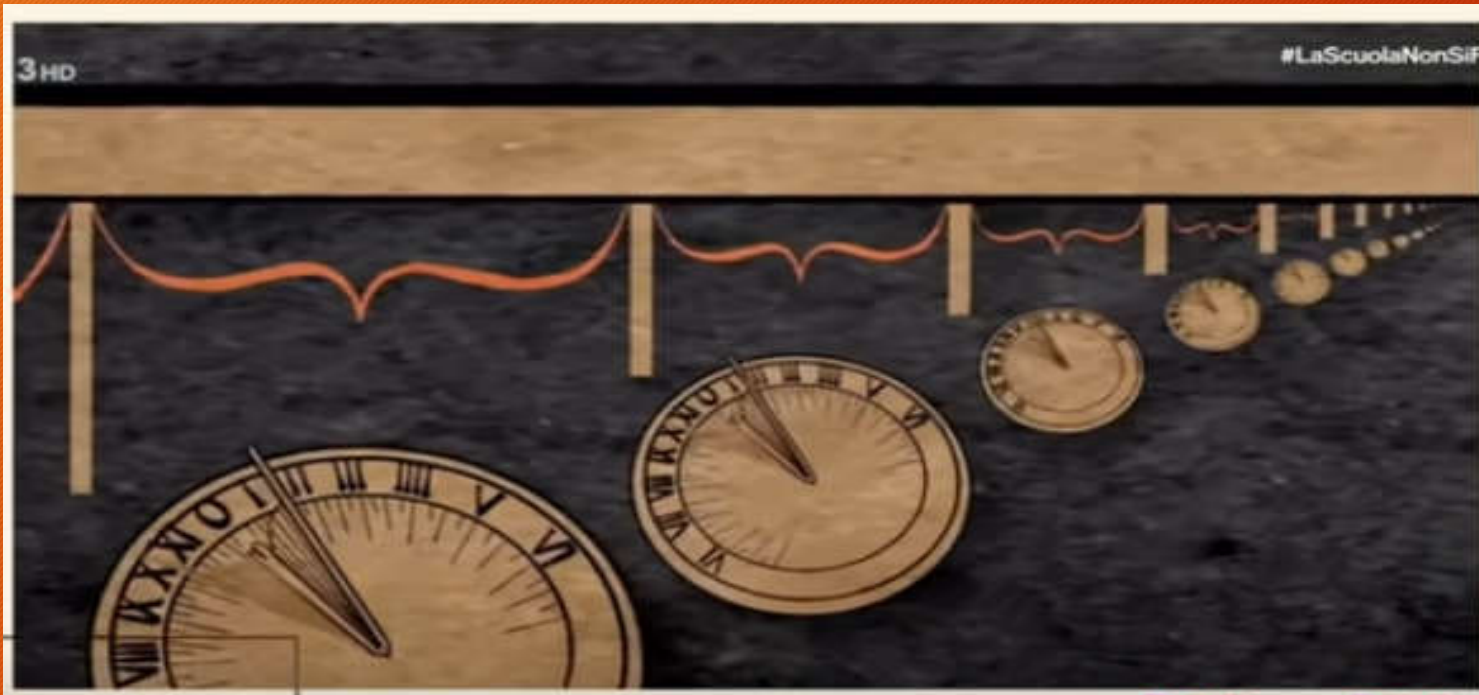
Zenone: la suddivisione infinita del movimento

- Così per Zenone il rapidissimo Achille, il più veloce, non raggiungerà nella corsa la lentissima tartaruga partita prima di lui.



La suddivisione infinita del Tempo

Spazio infinito -----> Tempo infinito!



Achille,
il piè veloce,
non raggiungerà
mai la lentissima
tartaruga

Il superamento del Paradosso

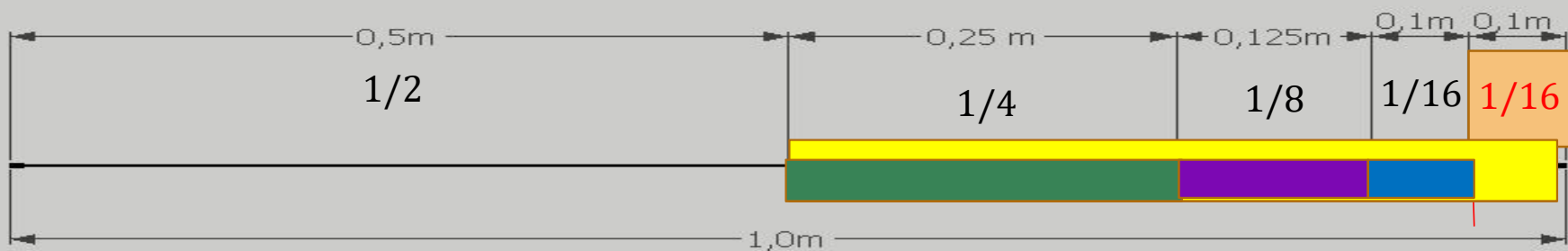
- Ma non è proprio così.....

In realtà la somma di infiniti addendi non deve essere necessariamente infinita: al tendere di n all'infinito la serie geometrica di ragione $1/2$ tende ad 1: 1 è matematicamente il limite finito di questa serie convergente

Consentitemi un'osservazione (non mia): La geometria sembra essere un ostacolo alla comprensione della realtà, mentre oggi ad essa ci si rivolge con fiducia per capire cosa ci accade intorno.

La Misura: Infinito e Infinitesimi

- La somma di INFINITI INFINITESIMI può dare una misura finita.



$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75 \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = 0,9375 \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512} = 1 - \frac{1}{512} = 0,998$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{2048} = 1 - \frac{1}{2048} = 0,99951$$

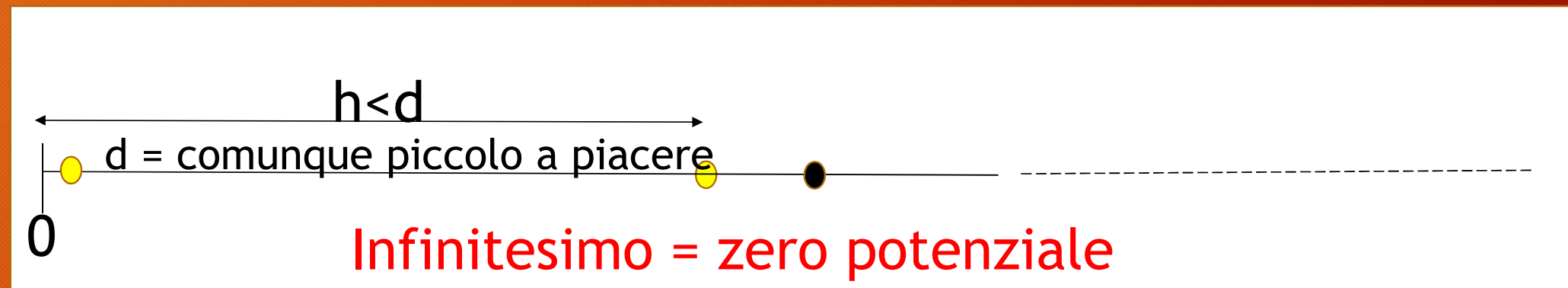
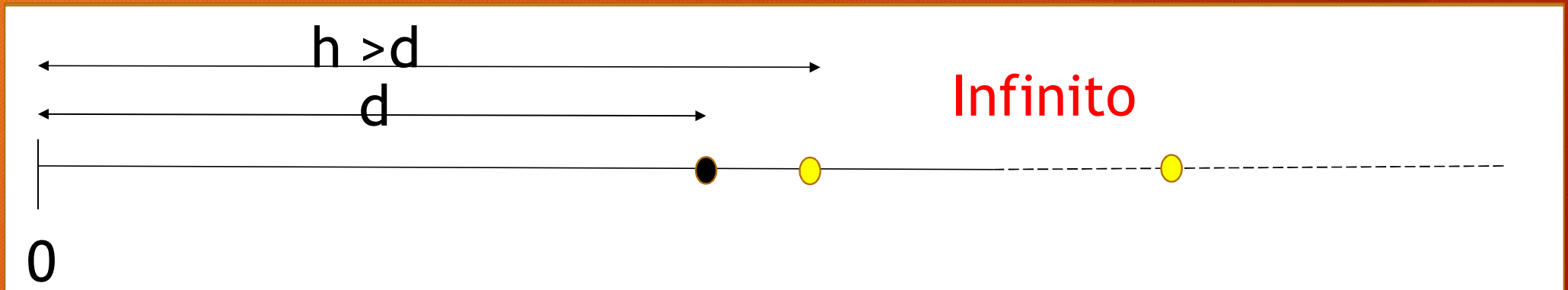
→ Tende a 1



Copyright © 2010 Pearson Education, Inc. All rights reserved. Printed in the United States of America. This publication is protected by copyright. Any unauthorized distribution or reproduction of this work is illegal. All other rights reserved.

© 2010 Pearson Education, Inc. or its affiliate(s). All rights reserved. Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Benjamin Cummings, 101 Philip Drive, Assinippi Park, New York, NY 10984-2135

L'Infinito e gli Infinitesimi: Interpretazione



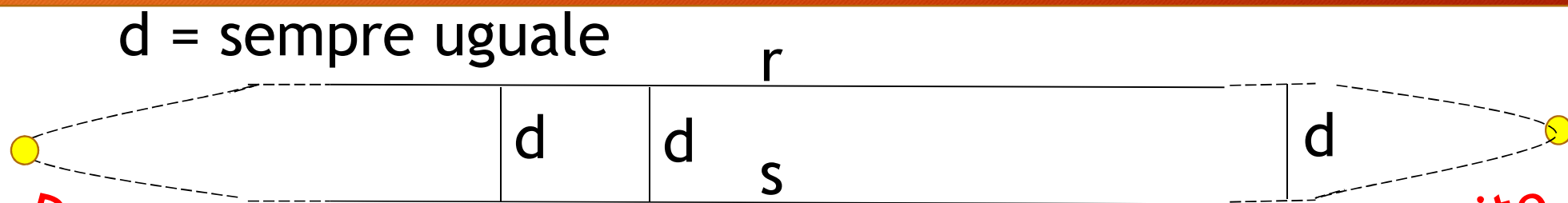
Infinito: una rappresentazione ottica



Punto improprio
all'infinito.

Brunelleschi (Firenze, 1377-
Firenze, 15 Aprile 1446)

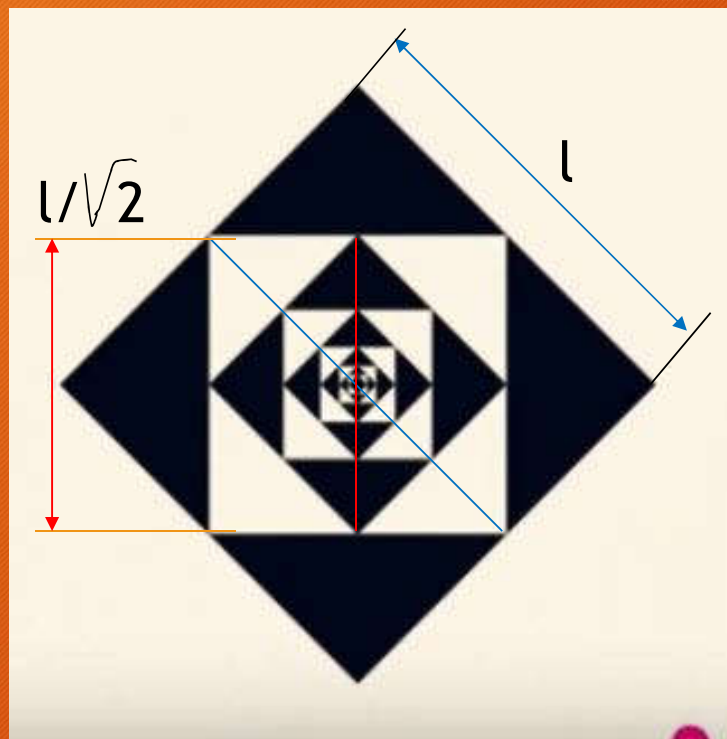
Infinito: una interpretazione geometrica



Punto improprio = direzione
Punto unico!

Punto improprio all'infinito

Infinito: una costruzione geometrica



Quadrati telescopici!

I lati dei quadrati neri sono le
diagonali dei quadrati bianchi
e

i lati dei quadrati bianchi sono le
diagonali dei quadrati neri.

I lato e la diagonale del quadrato
sono incommensurabili

Di nuovo π

Leibnitz

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \dots$$

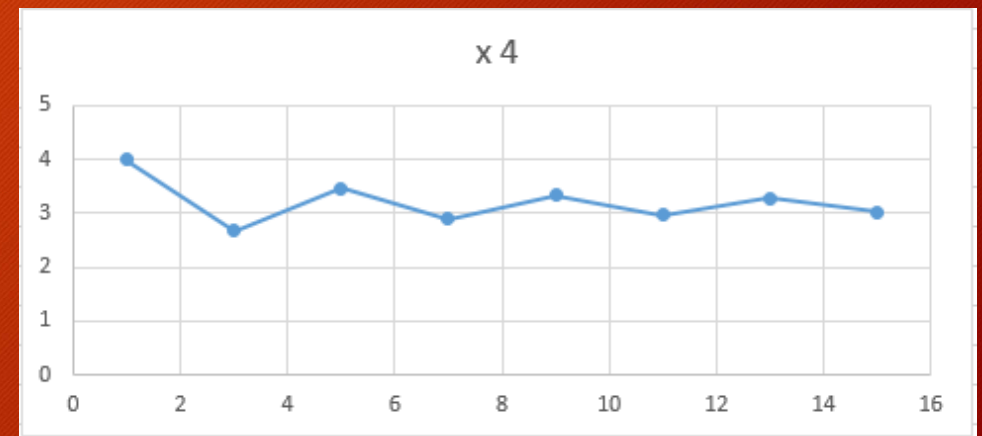
Una somma infinita di numeri inversi di tutti i numeri dispari si avvicina sempre di più a $\pi/4$, fino a raggiungerlo quando i termini divengono infiniti!

Di nuovo π !

Leibnitz

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \dots = 3,14159 \dots$$

N			x4
1	1/1	1	4
3	1/1 -1/3	0,6666667	2,666667
5	1/1 -1/3+1/5	0,8666667	3,466667
7	1/1 -1/3+1/5-1/7	0,7238095	2,895238
9	1/1 -1/3+1/5-1/7+1/9	0,8349206	3,339683
11	1/1 -1/3+1/5-1/7+1/9-1/11	0,7440115	2,976046
13	1/1 -1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13	0,8209346	3,283738
15	1/1 -1/3+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15	0,754268	3,017072

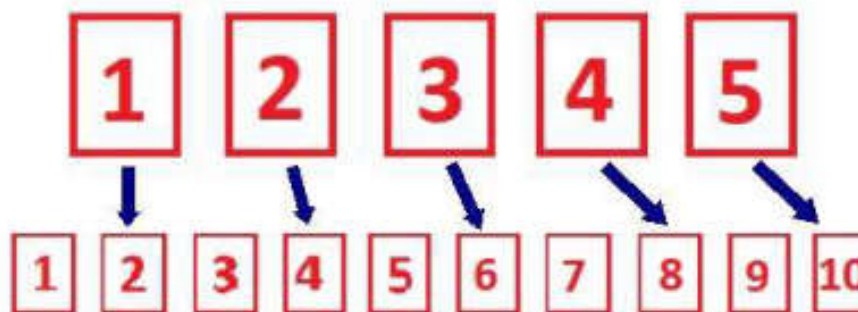


L'Infinito: una descrizione. Cantor (1845-1918)

Un uomo possiede un albergo con un numero di stanze infinito, e l'albergo è al completo. Arriva un altro ospite. L'albergatore sposta allora l'ospite della stanza 1 nella stanza 2, quello della 2 nella 3, quello della 3 nella 4, e via di seguito. Così la stanza 1 rimane libera per il nuovo ospite. E così via per ogni nuovo ospite che arriva.

L'Infinito: un uso pratico. Cantor

Come liberare infinite stanze per accogliere infiniti nuovi ospiti!



Lo spostamento degli ospiti fatto dal furbo albergatore per liberare infinite stanze per i nuovi infiniti ospiti.

L'Infinito: Quando un insieme è infinito?

In base a quanto appena detto saremmo in grado di stabilire se un insieme di tantissimi elementi è infinito?

Come possiamo stabilire se i granelli di sabbia della spiaggia sono infiniti?

Li contiamo?

Siamo sicuri di riuscirci in un tempo ragionevole?

un insieme è infinito se esiste un'applicazione biunivoca di in un suo sottoinsieme proprio .

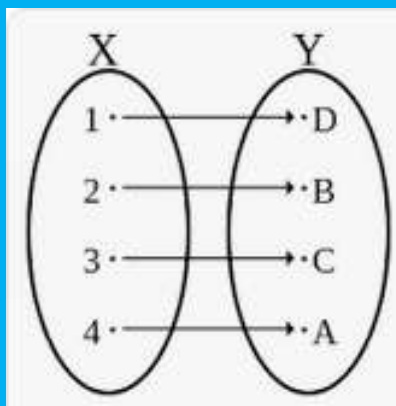
L'Infinito: Un metodo per comprendere l'infinito

Esiste un metodo con cui posso valutare che un insieme di elementi è infinito in modo semplice e veloce?

SI'!

La Corrispondenza

Esempio di corrispondenza biunivoca



Corrispondenza biunivoca: ad ogni elemento dell'insieme X corrisponde un unico elemento dell'insieme Y e ad ogni elemento dell'insieme Y corrisponde un unico elemento dell'insieme X

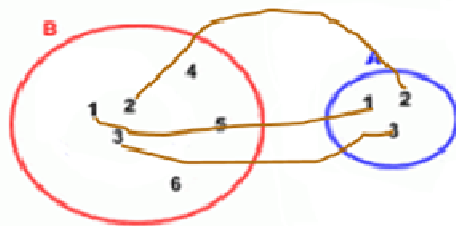
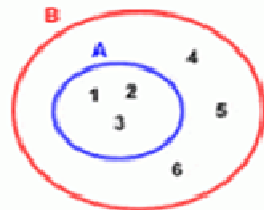
La Corrispondenza: un metodo per comprendere l'infinito

Un insieme è **infinito** se esiste un'**applicazione biunivoca** con un suo sottoinsieme (proprio).

$$A \subseteq B$$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



- L'insieme A è contenuto nell'Insieme B.

L'insieme A è un sottoinsieme (proprio) di B

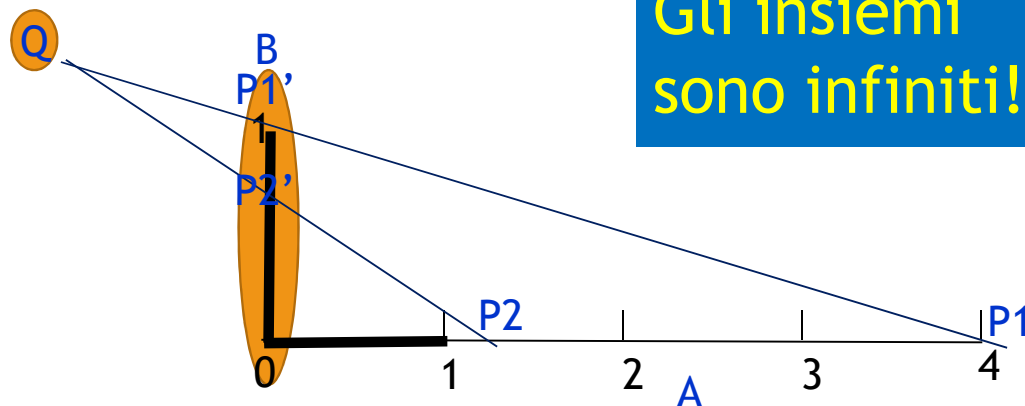
Posso metter in corrispondenza biunivoca tutti gli elementi dei due insiemi?

No. Gli elementi $\{4, 5, 6\}$ non hanno corrispondenze

Allora gli insiemi non sono infiniti!

L'Infinito: una corrispondenza biunivoca tra insieme e sottoinsieme (proprio)

Un insieme è **infinito** se esiste un'**applicazione biunivoca** con un suo sottoinsieme (proprio).



**Gli insiemi
sono infiniti!**

Un sottoinsieme si dice **PROPRIO** se:

- non è vuoto
- tutti i suoi elementi sono una parte dell'insieme

La misura dell'area del cerchio

- ESEMPIO
applicazione del metodo degli
Infinitesimi e dell'Infinito al calcolo
dell'area del cerchio.

L'Area del cerchio

- a) Partiamo da un risultato già noto, la misura della Circonferenza:

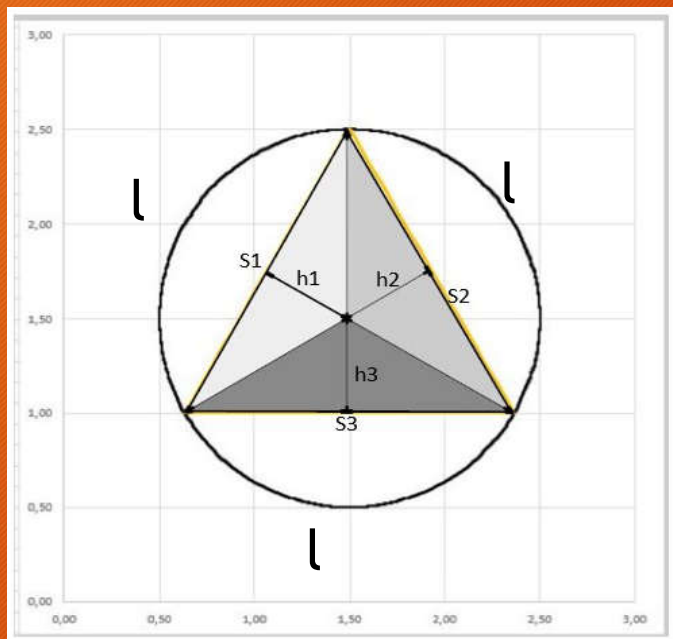
$$C = \pi D = 2\pi R$$

- b) Dimostreremo che l'area (superficie) del cerchio è:

$$S = \pi R^2$$

L'Area del cerchio

- a) Iniziamo inscrivendo un triangolo equilatero in una circonferenza di raggio r

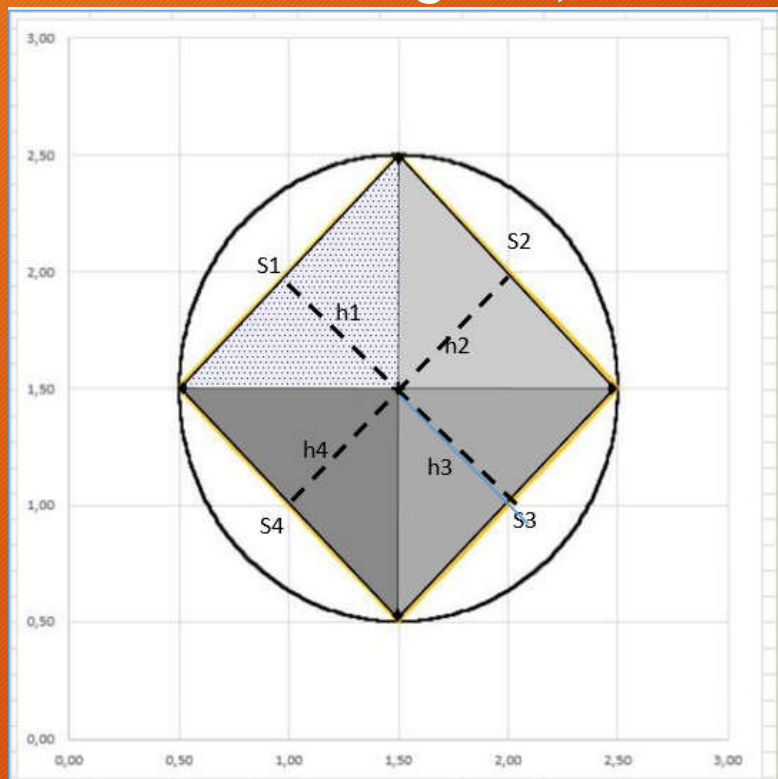


- b) La circonferenza è così divisa in tre archi uguali di lunghezza l a cui sostituiamo i tre lati del triangolo s_1, s_2 e s_3 che sono anch'essi uguali ad « s » e costituenti le basi dei tre triangoli.
- c) I tre triangoli hanno altezza h_1 , h_2 e h_3 che sono tutte uguali. Ricordiamo che l'area di un triangolo è:
$$A = base * \frac{altezza}{2}$$
- d) L'area dei triangoli, uguali è:
$$A = s_1 * \frac{h_1}{2} + s_2 * \frac{h_2}{2} + s_3 * \frac{h_3}{2} = 3 * (s * \frac{h}{2}) = (3 * s) * \frac{h}{2}$$

Somma dei segmenti $* \frac{h}{2} = Perimetro * h/2$

L'Area del cerchio

- Ovviamente approssimare la superficie del cerchio con la somma dei tre triangolini, NON è una buona approssimazione!



- Ma possiamo migliorarla!
Possiamo ad esempio inscrivere nel cerchio un quadrato
- I 4 triangoli in cui suddividiamo il quadrato hanno un'area complessiva più simile a quella del cerchio

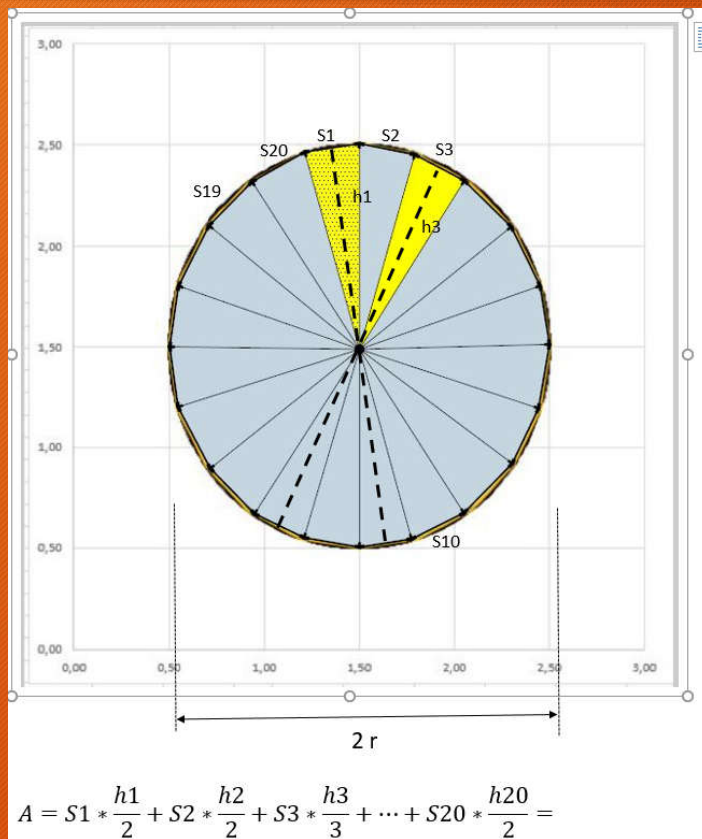
L'area dei 4 triangoli, uguali è:
 $A = 4 * (s * \frac{h}{2}) = \text{Somma dei segmenti } \frac{h}{2} = \text{Perimetro} * h/2$

L'Area del cerchio

- Possiamo migliorare ancora, e di molto!
- Inscrivendo nel cerchio un poligono regolare di 20 lati uguali (Icosagono).

Ecco il risultato.

L'Area del cerchio

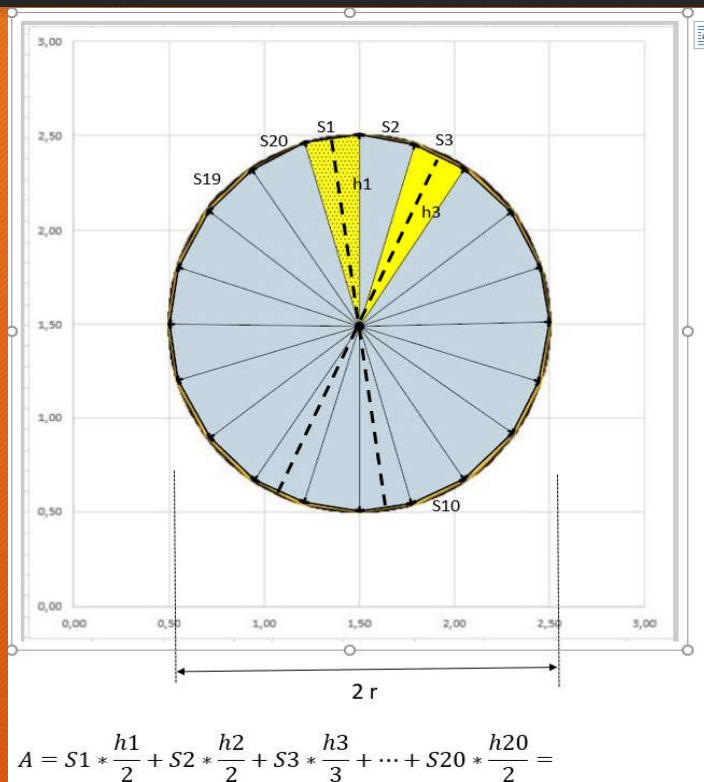


L'area del 20 triangoli, uguali è:

$$A = 20 * (s * \frac{h}{2}) = (20 * s) * \frac{h}{2} =$$

Somma dei 20 segmenti * $\frac{h}{2}$

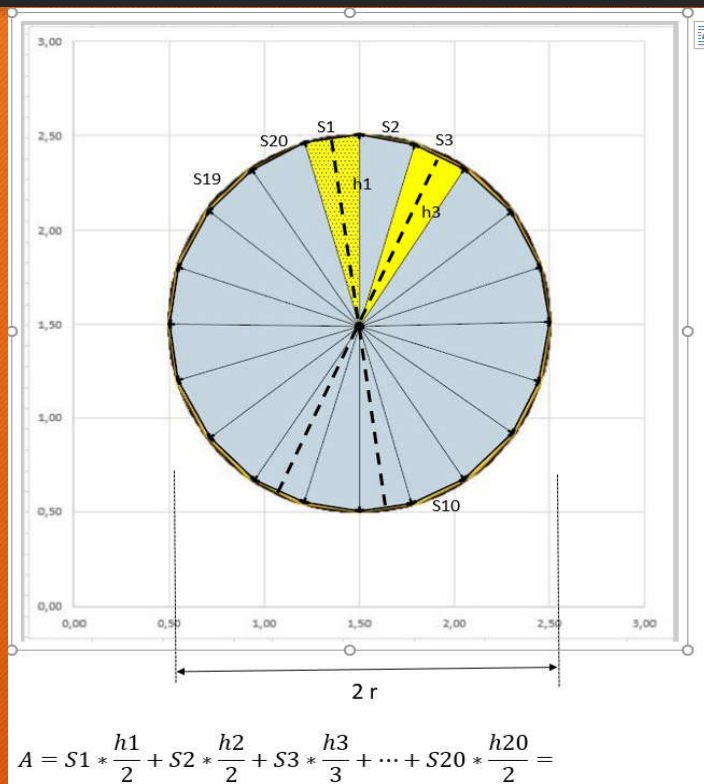
L'Area del cerchio



Abbiamo quindi capito che se aumentiamo il numero delle suddivisioni l'area della somma dei triangolini diventerà uguale all'area del cerchio.

Dovremo però riuscire a sommare infiniti termini! **Come faremo?**

L'Area del cerchio

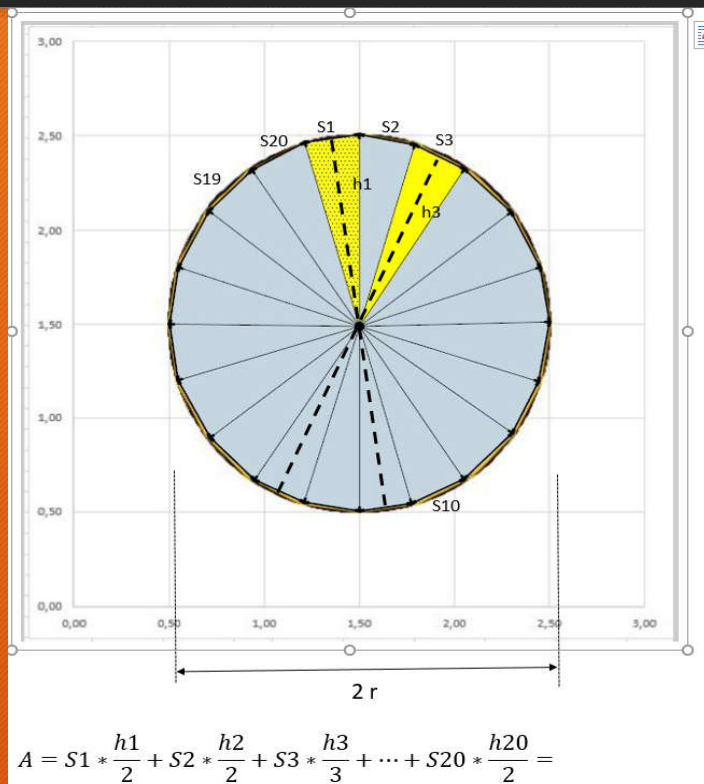


Osserviamo cosa accade alle basi, S_1 , S_2 ... , di ogni triangolino, durante questa suddivisione infinita

Le loro dimensioni diverranno di lunghezza infinitesima, ma saranno tutti contenuti nella circonferenza e quindi la loro somma (costruita da infiniti termini), sarà uguale alla lunghezza della Circonferenza! Non otterremo una lunghezza infinita, bensì:

Somma degli infiniti segmenti, ciascuno infinitesimo, è uguale a $2\pi R$

L'Area del cerchio



L'area del poligono di infiniti lati diverrà

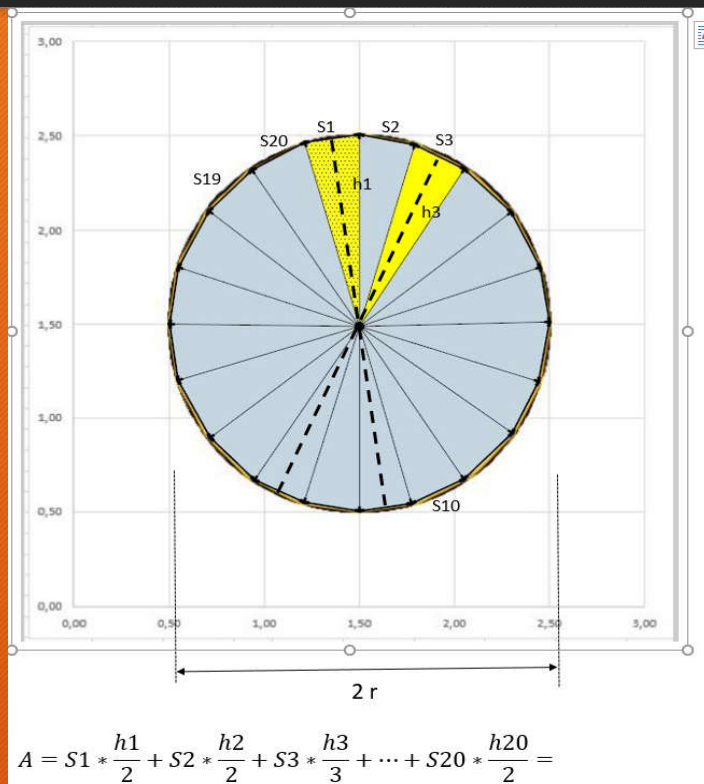
$$A = \text{Somma degli infiniti segmenti} * \frac{h}{2} = 2\pi R \frac{h}{2}$$

Ma aumentando il numero di segmenti si nota che l'altezza di ciascun triangolino cresce fino a confondersi con R, il raggio della Circonferenza. E così finalmente otterremo:

$$A = 2\pi R \frac{h}{2} = 2\pi R \frac{R}{2} = \pi R^2$$

L'area del CERCHIO!!!

L'Area del cerchio

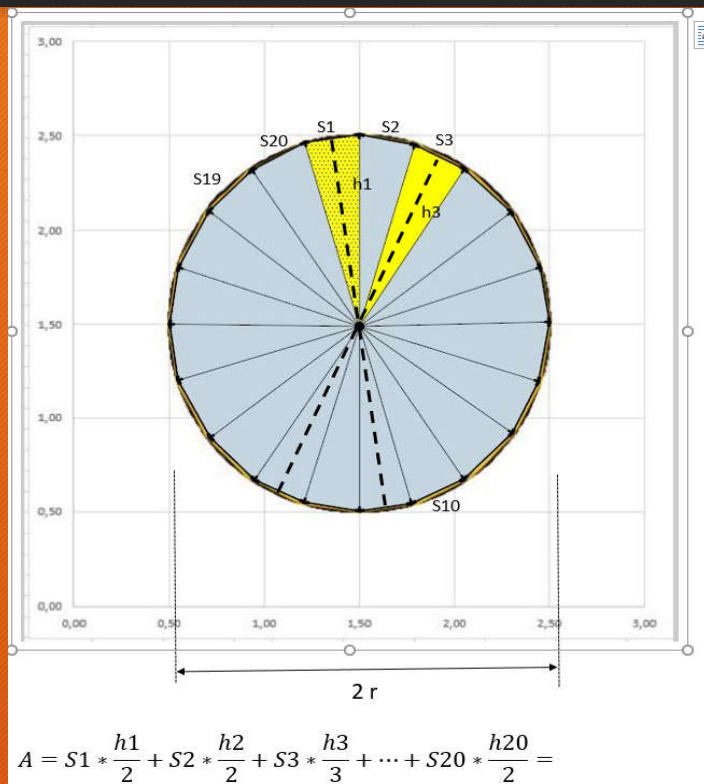


ABBIAMO ESEGUITO UNA SOMMA INFINITA!

QUESTO E' IL NOSTRO VERO SUCCESSO! UN RISULTATO NOTEVOLE. MAI OTTENUTO DALL'UOMO FINO AL 1600 CON NEWTON e LEIBNIZ (escludendo Archimede!)

E NON ABBIAMO DOVUTO FARE INFINITE SOMME, CHE AVREBBERO RICHIESTO UNO SFORZO IMPOSSIBILE RICHIEDENDO UN TEMPO INFINITO!

L'Area del cerchio



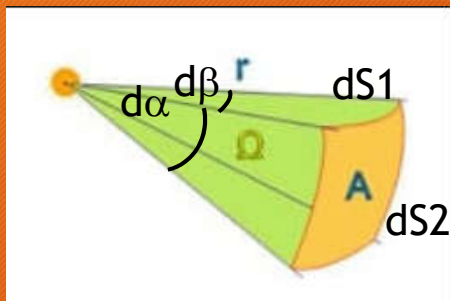
Facciamo un esempio. Qual è l'area di un cerchio di raggio 60 cm. Appliciamo la formula:

$$A = \pi R^2 = 3,14 * (60 \text{ cm})^2 = 3,14 * 60 * 60 \text{ cm}^2 = 3,14 * 3600 \text{ cm}^2 = 11.304 \text{ cm}^2$$

E quanto è lunga la circonferenza?

$$C = 2\pi R = 2 * 3,14 * 60 \text{ cm} = 6,28 * 60 \text{ cm} = 375,6 \text{ cm}$$

La superficie di una sfera



Dividiamo la superficie della Sfera in tanti quadratini sempre più piccoli, infinitesimi.

Il lato di ogni quadratino si trova su una Circonferenza di raggio r

La sua lunghezza è: $dS = r \cdot d\theta$

(*) L'area del quadratino sarà $dA = dS1 \cdot dS2 = r^2 \cdot d\alpha \cdot d\beta = r^2 \cdot d\Omega$
(Per correttezza il raggio di $dS1$ non è r ma varia da 0 a R in funzione della distanza verticale del quadratino dalla sommità della sfera).

$d\Omega$ è l'infinitesimo dell'angolo solido della Sfera

La superficie della Sfera è la somma degli infiniti infinitesimi dA :

$$\begin{aligned} S_{\text{sfera}} &= dA1 + dA2 + \dots + dAn + \dots = r^2 \cdot d\Omega + r^2 \cdot d\Omega \\ &+ \dots + r^2 \cdot d\Omega + \dots = r^2 \cdot (d\Omega + d\Omega + \dots d\Omega + \dots) = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Fine della III lezione

GRAZIE!