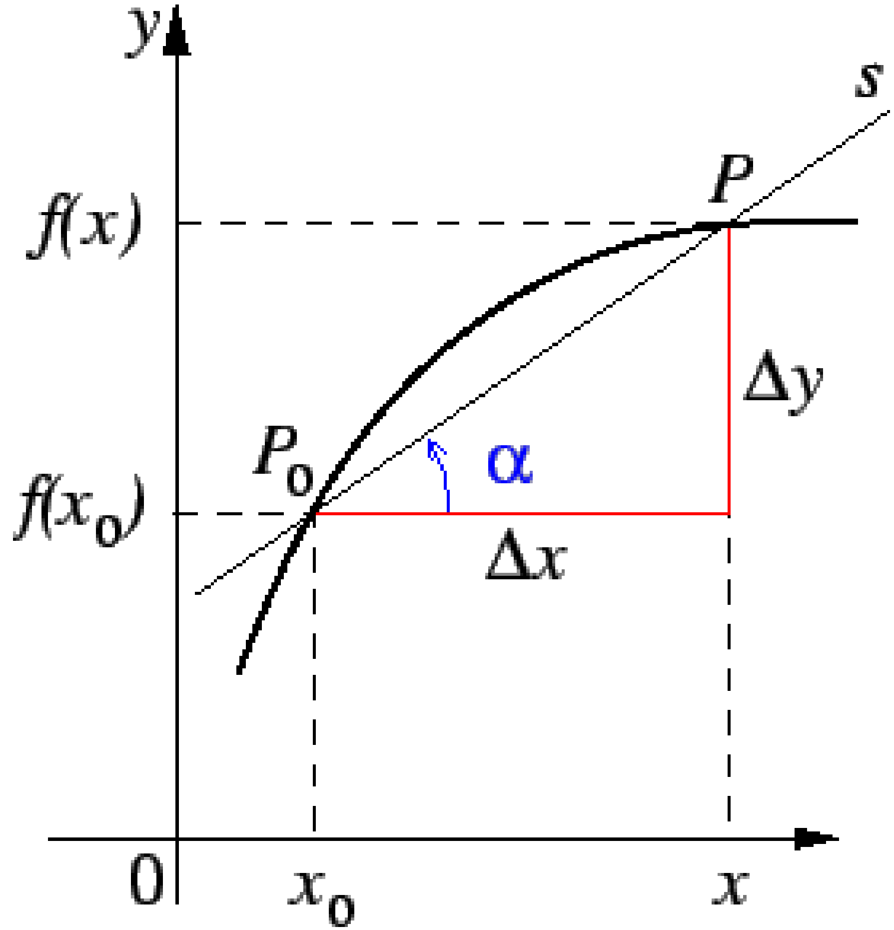
Concetto di derivate

e sue applicazioni



Sviluppo storico

Storicamente lo sviluppo dell'analisi infinitesimale è avvenuto attraverso le seguenti tappe:

1) il problema delle aree e, quindi, il calcolo integrale;

2) il problema delle tangenti e, quindi, il calcolo differenziale;

3) il concetto di limite, apparso in entrambi i problemi;

4) la costruzione rigorosa dell'insieme dei numeri reali.

Sfogliando, però, i libri di analisi matematica in uso nella scuola superiore gli argomenti di studio si susseguono nell'ordine esattamente inverso:

numeri reali,

limiti,

derivate,

integrali.

Viene sovvertita perciò la storia della matematica.

I motivi per cui ciò viene fatto sono diversi.

- In primo luogo occorre tener presente che lo sviluppo reale delle conoscenze matematiche è raramente un processo ordinato e completamente razionale, ma, al contrario, è spesso inquinato da fattori estranei alla matematica, provenienti da altri settori della scienza.

- In secondo luogo va osservato che l'esigenza del rigore, che pure è indispensabile, è sempre un fatto posteriore alla scoperta matematica, che resta un evento straordinario squisitamente intuitivo e spesso inspiegabile.

Perché introdurre le derivate?

Occorre risolvere vari problemi:

- Calcolo della tangente ad una curva di grado superiore al secondo
- Progettazione di lenti per l'osservazione astronomica, infatti per calcolare gli angoli di incidenza, di rifrazione e di riflessione di un raggio luminoso occorre conoscere la normale ad una curva, cioè la perpendicolare alla retta tangente
- Calcolo di velocità e di accelerazione istantanee
- Calcolo del valore massimo o minimo di una funzione per avere informazioni sul moto dei pianeti o per trovare l'angolo che avrebbe massimizzato la gittata.

Soluzioni di casi particolari

- Euclide nel libro III° degli "Elementi" nelle proposizioni 16, 17, 18, 19, tratta delle tangenti ad una circonferenza e della loro costruzione.
- Apollonio nel I° libro di "Sezioni coniche" alle proposizioni 17, 32, 33, 34, tratta delle tangenti ad un'ellisse, ad un'iperbole e ad un parabola

- Archimede nell' opera "Sulle spirali" trova la tangente alla spirale mediante considerazioni di carattere cinematico.
- Gilles Personne de Roberval generalizzò il metodo di Archimede
- Fermat, nel suo manoscritto del 1637 intitolato "Methodus ad disquirendam maximam et minimam", espone i metodi, che probabilmente erano già stati trovati sin dal 1629, per risolvere sia il problema della tangente sia quello del calcolo dei massimi e dei minimi.

Newton

25/12/1642 20/3/1727

Si può considerare l'inventore effettivo del calcolo differenziale

Anche se, al riguardo, vi fu una accesa disputa con Leibniz.

In un carteggio con Leibniz del 1677 Newton rivelò, sotto forma cifrata il principio fondamentale del suo calcolo differenziale e Leibniz rispose spiegando i principi dei suoi lavori in questo campo.

La disputa ebbe inizio nel 1695 quando Wallis riferì a Newton che in Europa il calcolo era considerato un'invenzione del matematico tedesco.

Successivamente durante il suo soggiorno a Londra, Leibniz fu accusato di aver plagiato Newton. Egli allora si appellò alla Royal Society nel 1704 chiedendo giustizia.

Nel 1708 il fisico Keill, difese vigorosamente Newton in un articolo su un giornale. Per via dell'insistenza di Leibniz la Royal Society nominò una commissione incaricata di studiare la questione, che diede ragione a Newton.

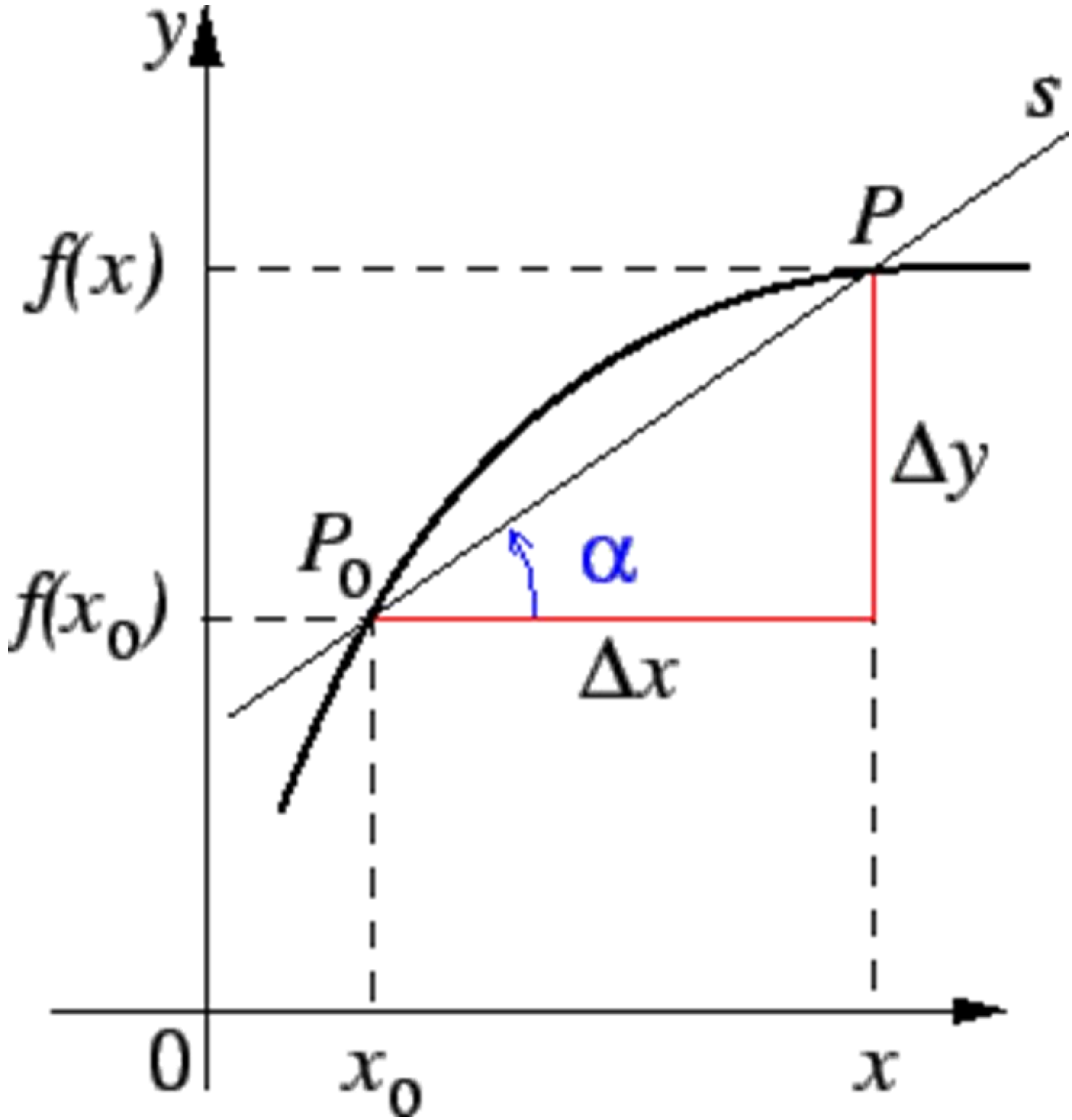
- Oggi gli storici della scienza tendono a riconoscere a Newton una priorità nelle applicazioni fisico-meccaniche del calcolo e a Leibniz una priorità sugli aspetti logico-matematici e sui simboli usati per derivate e integrali.
- Gli studi storici e filologici hanno anche messo in evidenza il grande contributo dato all'invenzione del calcolo sia dai matematici precedenti a Newton e Leibniz, sia i contributi essenziali dei matematici successivi, fra cui i Bernoulli, Eulero, e altri.

- La derivata è la misura di quanto la crescita di una funzione cambi al variare del suo argomento.

- Il significato pratico di derivata è il tasso di variazione di una certa grandezza presa in considerazione. Un esempio molto noto di derivata è la variazione della posizione di un oggetto rispetto al tempo, chiamata velocità istantanea.

Metodo del geometra

Significato geometrico della derivata


y
s
P
f(x)
Δy
P0
α
f(x0)
Δx
0
x0
x

Definizioni

- Algebrica:

Considero una funzione reale f(x) di variabile reale x e un punto x_0 del suo dominio. La derivata di f(x) in x_0 è definita come il numero uguale al limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento, sotto l'ipotesi che tale limite esista e sia finito.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometrica

La derivata è il valore della tangente trigonometrica dell'angolo (convesso) che la retta tangente in x_0 al grafico della funzione forma con l'asse delle ascisse (a patto che tale angolo non sia retto).

L'equazione della retta tangente risulta:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Un esempio di calcolo di derivata

$$y = x^2$$

Calcolo il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} =$$

$$= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Trovo la tangente

Nel punto $P(3;9)$

Calcolo il coefficiente angolare

$m' = y'(3) = 6$

$y - 9 = 6(x-3)$

$y = 6x-9$ equazione della tangente

Alcune regole di derivazione

- D(k) = 0
- D(x^n)= nx^{n-1}
- Derivata di una somma di funzioni è la somma delle derivate
- Derivata di un prodotto: y = f(x)·g(x)
  allora
  y' = f'(x)·g(x) + f(x)·g'(x)
- Derivata di un quoziente: y = f(x)/ g(x)

  allora

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Applicazioni

Visto che la derivata, per come è costruita mi da' la velocità con cui varia la y al variare della x, sarà possibile utilizzare le derivate in tutti quei fenomeni ove ci interessa avere la velocità di variazione del fenomeno stesso:

- potremo calcolare la variazione dello spazio rispetto al tempo, cioè la velocità,
- la variazione della velocità rispetto al tempo, cioè l'accelerazione,
- la velocità di una reazione chimica o il flusso di una corrente elettrica

IL DIFFERENZIALE

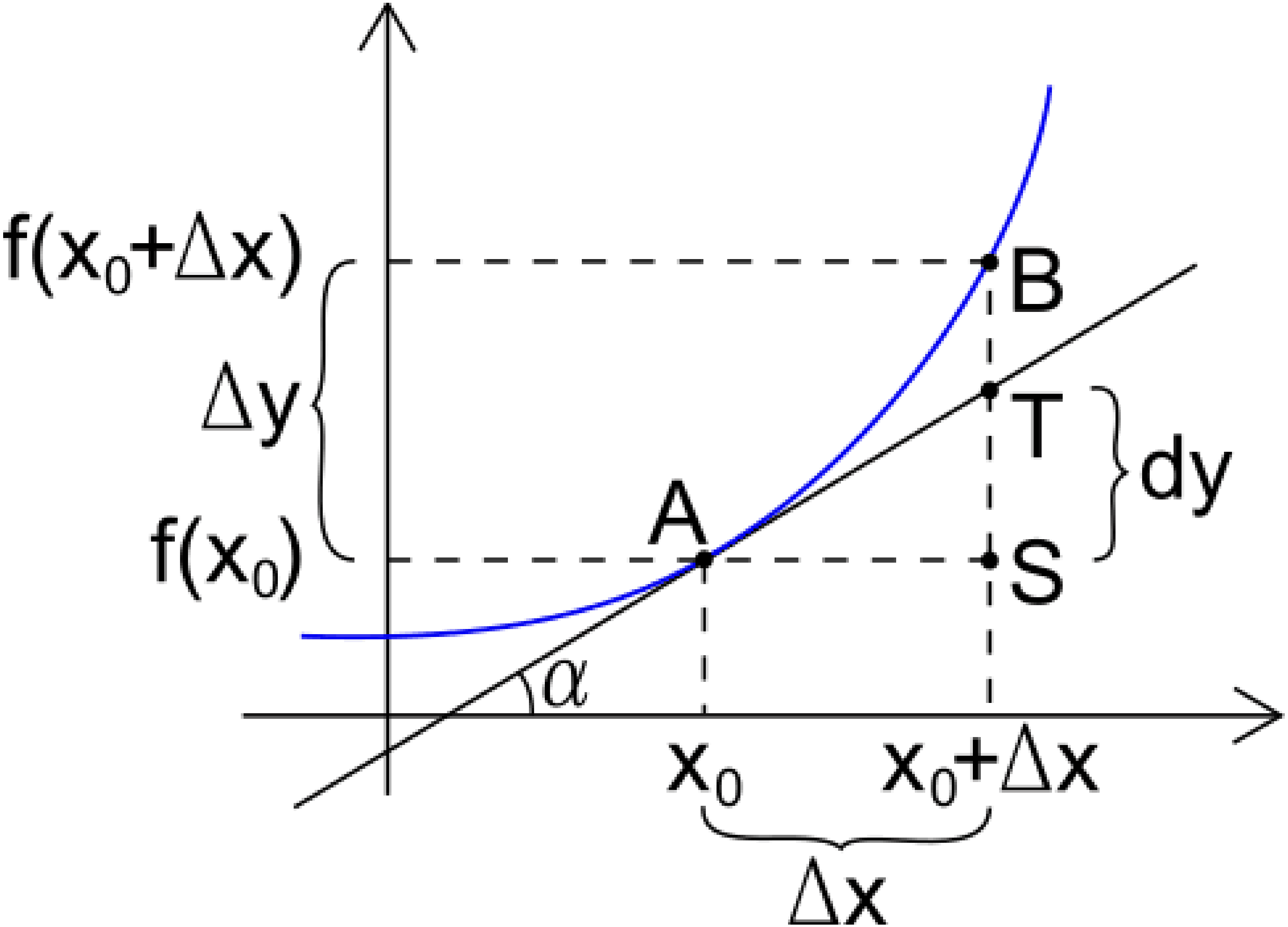
Cominciamo con la **definizione di differenziale** di una funzione derivabile in un intervallo. Più precisamente quella che segue è una definizione ingenua di differenziale di una funzione, dove l'aggettivo *ingenua* è d'obbligo perché quella che analizzeremo in prima istanza non è la definizione formale, ma risulta comunque corretta e può essere utilizzata senza remore nella risoluzione degli esercizi.

Sia I un intervallo aperto e sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo. Consideriamo $x_0, x \in I$ e definiamo l'incremento Δx relativo ad x_0 come la differenza

$$\Delta x := x - x_0$$

Chiamiamo **differenziale della funzione** $f(x)$ nel punto x_0 con incremento Δx il prodotto della derivata prima valutata in x_0 per l'incremento Δx, e lo indicheremo con uno dei simboli $dy,\ df(x_0),\ df_{x_0}(\Delta x)$

$$dy = df(x_0) = df_{x_0}(\Delta x) := f'(x_0)\Delta x$$



f(x0+Δx)
Δy
f(x0)
B
T
dy
A
S
α
x0
x0+Δx
Δx

Quale è il differenziale

E’ il segmento TS, cioè l’immagine del punto incrementato calcolata secondo la retta tangente e non secondo la funzione.

$$TS = AS \, tg\alpha$$

Il costo marginale

- Viene di seguito proposta un'applicazione del differenziale di una funzione all'economia. Dopo aver definito il concetto di costo marginale della produzione di un dato bene da parte di un'azienda, viene proposta una semplice applicazione per la comprensione del suo significato.
- Costo marginale è la variazione del costo totale di produzione che si verifica quando la quantità prodotta viene modificata di una unità.

Quando un’azienda produce un bene, si effettua una distinzione tra i costi fissi Cf, necessari per avviare l’impresa, e i costi variabili che invece dipendono dalla quantità di beni che l’azienda è in grado di produrre.

Se si indica con x la variabile “beni prodotti dall’azienda” e con Cv i costi variabili per la produzione dei beni, il costo totale sarà dato da:

$$C(x)=Cf+Cv(x)$$

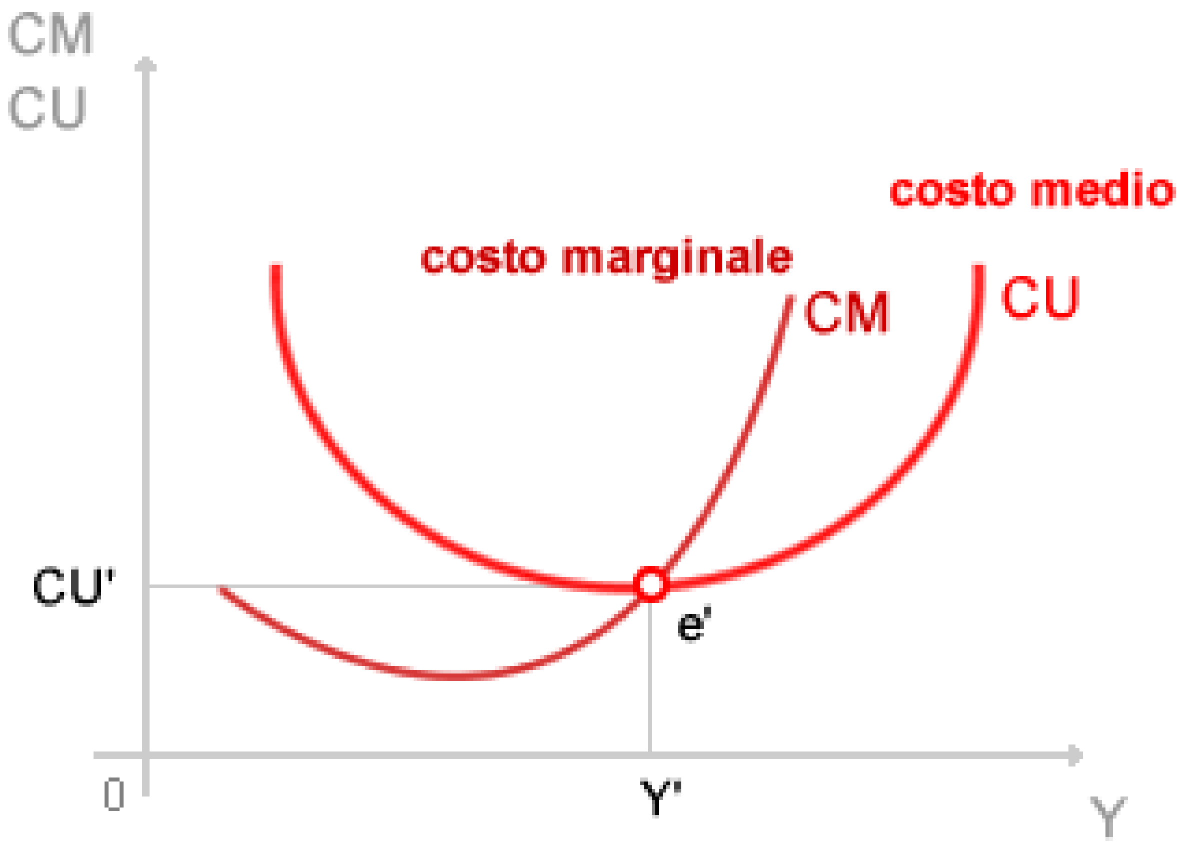
Definizione. Si dice costo marginale della produzione dei beni, la derivata rispetto alla variabile x della funzione che definisce il costo totale.

Finchè il costo marginale non uguaglia il prezzo, l'impresa ha convenienza ad aumentare la produzione; quando il MC invece supera il prezzo, l'impresa non ha più convenienza a produrre una quantità extra di prodotto ad un costo superiore al prezzo.
(MC) = costo di un'unità addizionale di prodotto.

Sfruttando il concetto di approssimazione lineare di una funzione, possiamo scrivere:

$C(x+\Delta x) \approx C(x)+C'(x)\cdot\Delta x$

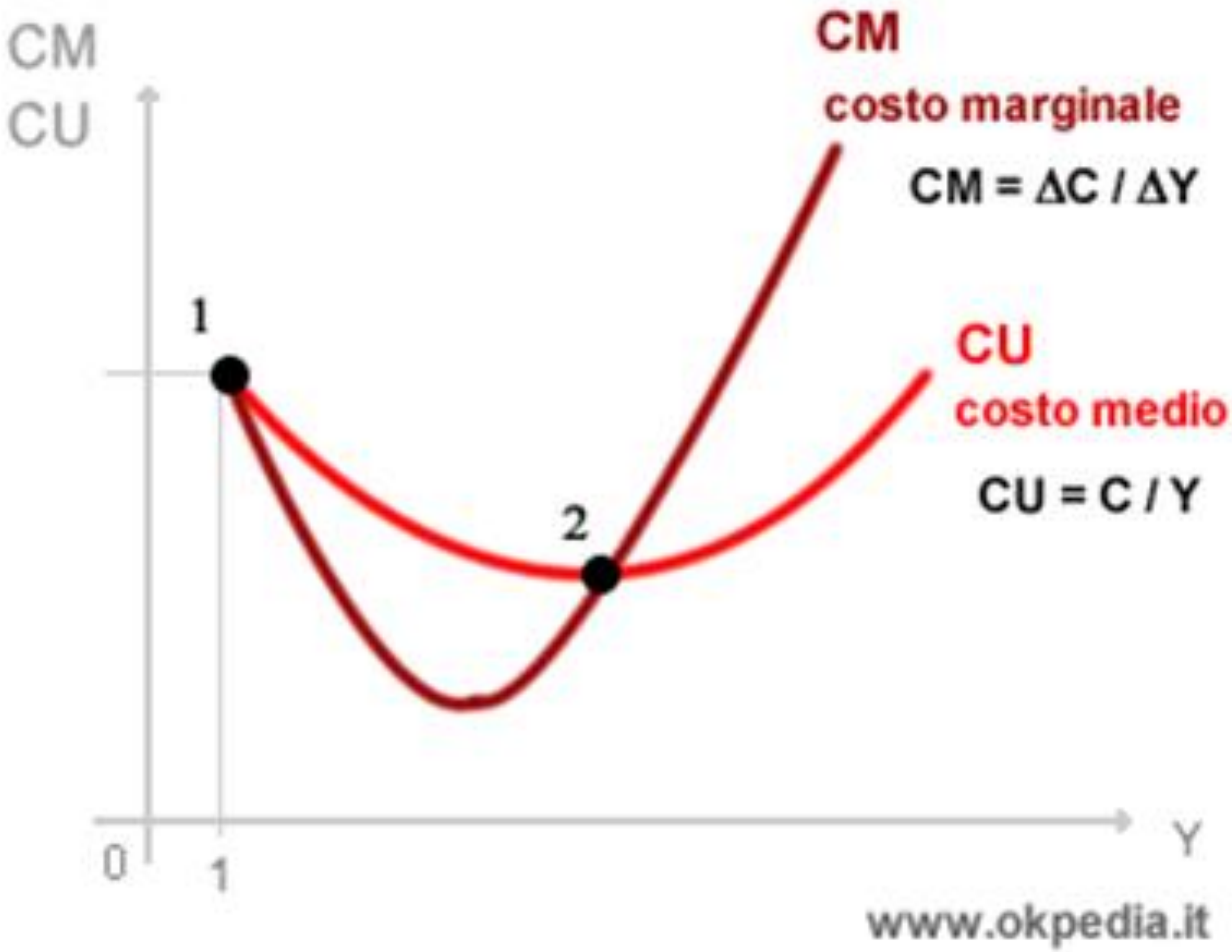
Se si pone $\Delta x = 1$, si può subito dedurre che il costo marginale è dato dall'incremento di costo necessario per la produzione di una nuova unità di prodotto.


CM
CU
costo medio
costo marginale
CM
CU
CU'
e'
0
Y'
Y

- Nel caso del costo medio viene preso in considerazione il costo totale (C) che, a sua volta, è composto dai costi fissi e dai costi variabili. Quindi, la curva del costo medio è calcolata tenendo conto sia dei costi fissi e sia dei costi variabili come grandezze assolute.
- Nel caso del costo marginale, invece, sono presi in considerazione soltanto i costi variabili poiché i costi fissi non variano al variare della quantità di produzione e la loro variazione marginale è sempre nulla. Quindi, la curva del costo marginale misura soltanto l'incremento dei costi variabili come grandezza relativa.

Tratto decrescente. Nella fase iniziale la curva del costo marginale è decrescente poiché l'impiego di unità addizionali dei fattori produttivi consente di utilizzare meglio l'impianto. In questa fase il prodotto marginale dei fattori produttivi è crescente.

Tratto crescente. Una volta oltrepassato il punto di minimo, la curva del costo marginale diventa crescente poiché, in questa seconda fase, ogni ulteriore unità addizionale di impiego dei fattori produttivi peggiora l'efficienza dell'impianto. In questa seconda fase il prodotto marginale dei fattori produttivi è decrescente. È quindi necessario un incremento della quantità dei fattori produttivi (lavoro, materie prime, ecc.) per ottenere un'ulteriore unità di prodotto.


CM
CU
CM
costo marginale
CM = ΔC / ΔY
CU
costo medio
CU = C / Y
1
2
0
1
Y
www.okpedia.it

Il costo marginale eguaglia il costo medio in due punti.

- Il primo punto si ha quando si produce la prima unità di produzione.

- Il secondo punto si verifica nel tratto crescente della curva del costo marginale, in quanto i costi variabili crescono più rapidamente rispetto ai costi medi.
- L'uguaglianza tra il costo medio e il costo marginale determina la dimensione efficiente dell'impresa.

Esempio

Supponiamo che la funzione:

C(x)=Cf + $3x^{0,5}$

rappresenti la funzione del costo totale per la produzione di un dato bene x da parte di un'azienda.

Il costo marginale sarà quindi dato da:

C'(x)= $3\ 0.5\ x^{-0,5}$ = $\frac{1,5}{x^{0,5}}$

Se l'azienda considerata produce soltanto 60 unità del bene, il costo marginare sarà dato da:

C'(60)= $\frac{1,5}{60^{0,5}}$ ≈0,19

Quindi se si vuole produrre una nuova unità del bene, sarà necessario spendere 19 centesimi in più.