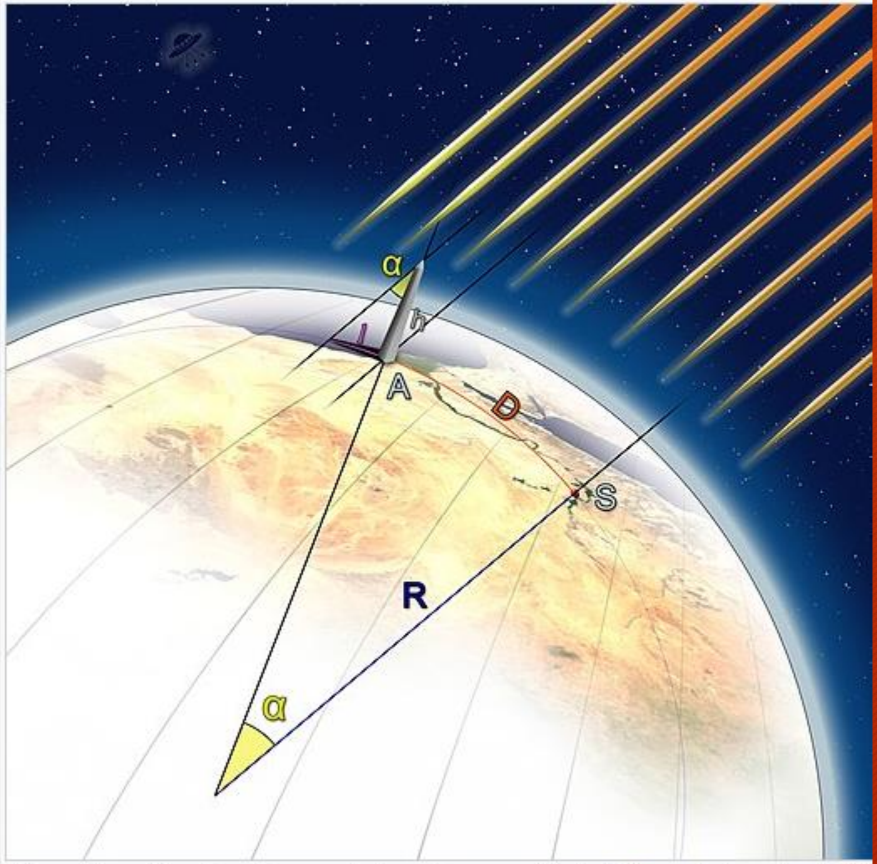
Addendum. Triangoli qualsiasi e la trigonometria



Misura del meridiano terrestre secondo la versione semplificata di Cleomede, basata sulle assunzioni errate che Siene fosse sul Tropico del Cancro e sullo stesso meridiano di Alessandria.

La Trigonometria

Vale nella Geometria Euclidea : I 5 Postulati

In articolare si ricava da:

- La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre 180°
- Similitudine
- Teorema di Pitagora

Angoli dei raggi terrestri

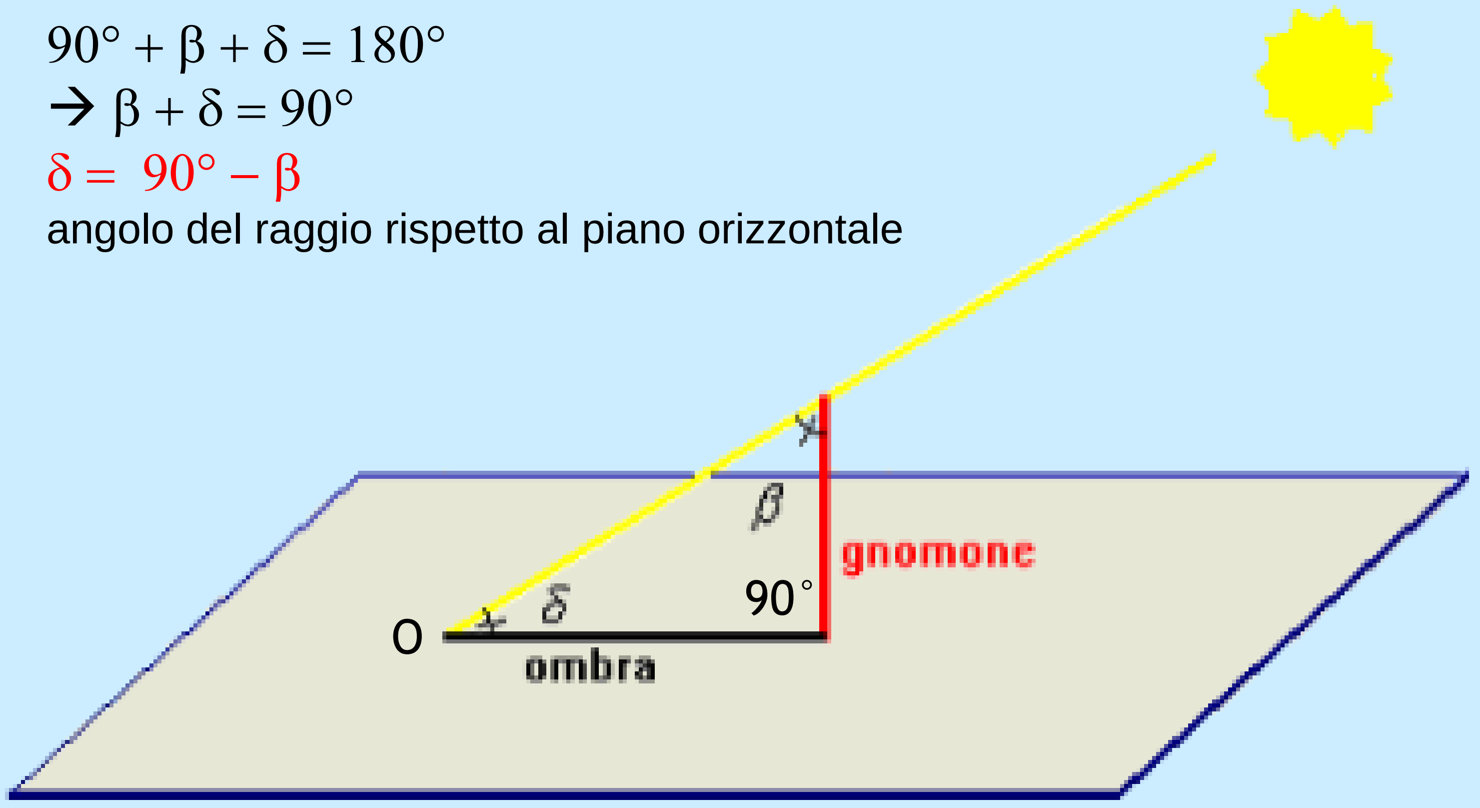
Misura dell'angolo β

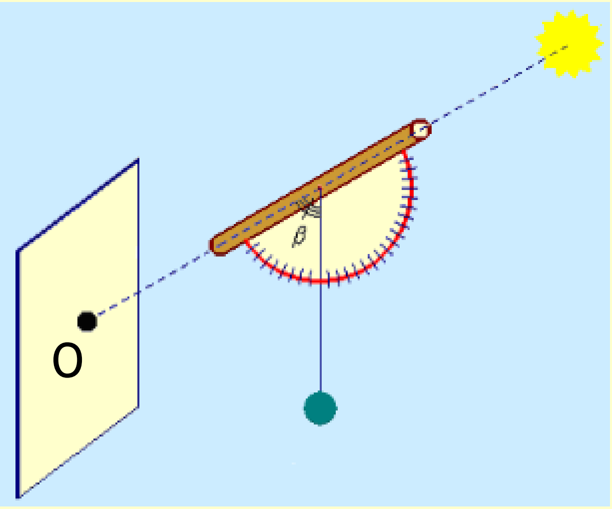
$90° + \beta + \delta = 180°$

$\rightarrow \beta + \delta = 90°$

$\delta = 90° - \beta$

angolo del raggio rispetto al piano orizzontale



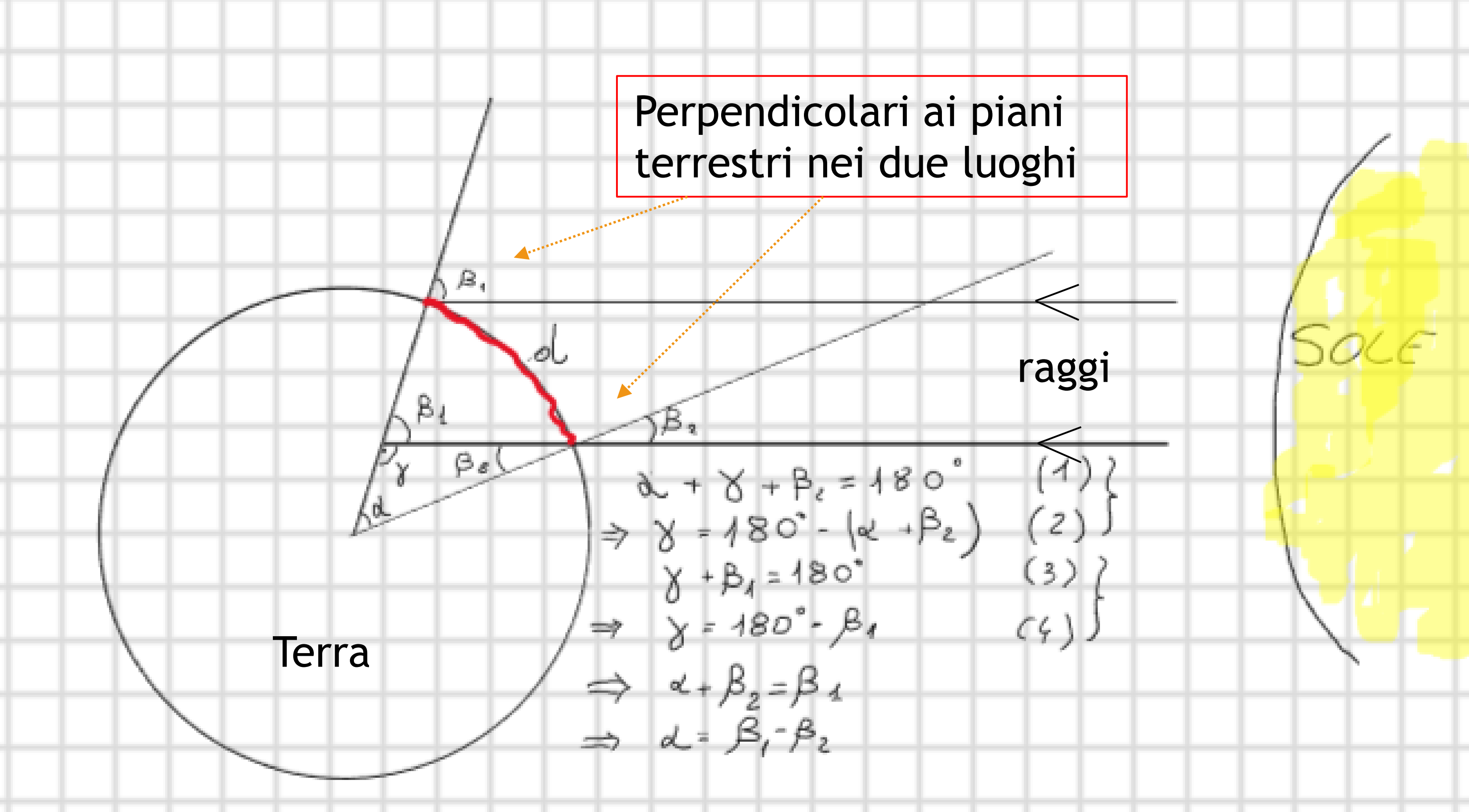


Misura della Circonferenza della Terra

Eratostene di Cirene (276-197 a.C)

Eratòstene di Cirene -Alessandria d'Egitto, è stato un matematico, astronomo, geografo, poeta, filologo e filosofo greco antico. È noto alla storia soprattutto per aver concepito il metodo matematico trigono-geometrico che porta il suo nome, e che gli permise di calcolare la più accurata misura, tra quelle antiche, della circonferenza-terrestre, più precisamente del meridiano-terrestre passante per l'‘Egitto utilizzando delle semplici osservazioni e misurazioni in quei luoghi durante i solstizi d'estate.

Angolo al centro e lunghezza dell’arco

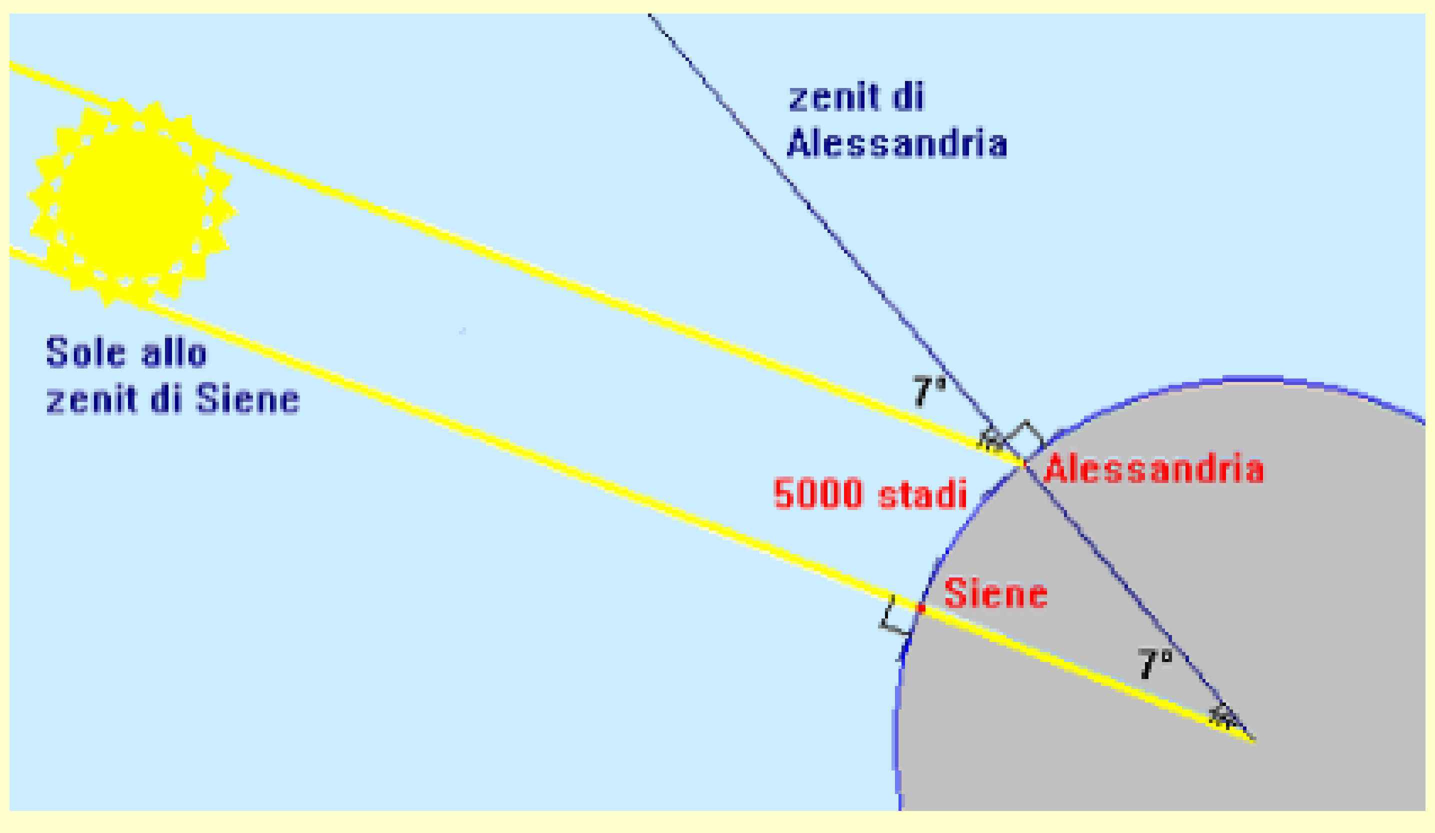


C= circonferenza terrestre

Proporzione

$C : d = 360 : \alpha°$

Eratostene (276-197 a.C): Circonferenza della Terra



C= circonferenza terrestre

d= 5000 stadi = 787,5 Km
α = 7°

Proporzione

$$C : d = 360° : \alpha$$

Eratostene
360° / 7°=51,43 = C/d
C=51,43 x 787,5km= 40500km

Raggio Terrestre: 6378km
C= 2πR = 6,28*6370km = 40053 km

Studenti che ripetono la misura di Eratostene

Trigonometria

La Trigonometria e’ la matematica che studia i triangoli

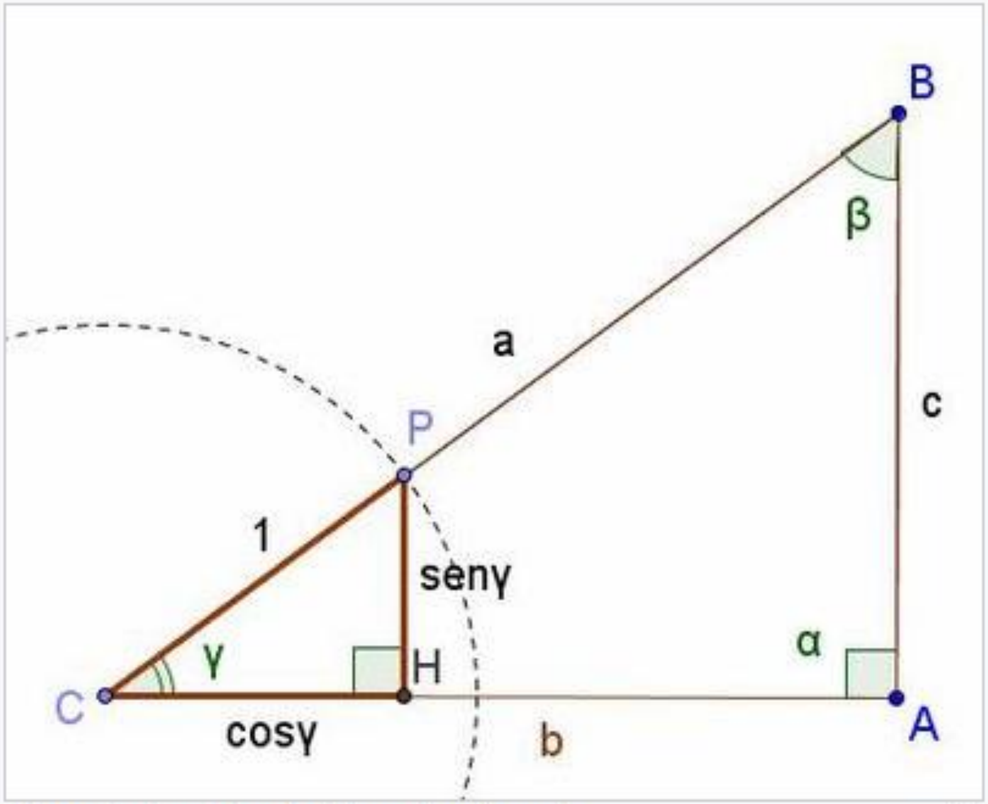
Consiste nel calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di un triangolo (lati, angoli, ecc.) partendo da altre misure già note (almeno tre, di cui almeno una lunghezza), per mezzo di speciali funzioni.

Ipparco di Nicea (190-120 a.C)

Nome originale	*Νίκαια*
Localizzazione	
Stato attuale	Turchia
Località	İznik
Coordinate	40°25′44.4″N 29°43′10.2″E
Cartografia	

Astronomo greco noto per la scoperta della precessione degli equinozi (l’asse terrestre ruota ogni anno di 50’’ in senso orario

Seno e Coseno



Dimostrazione formule triangolo rettangolo

ABC : Triangolo rettangolo

CPH : Triangolo rettangolo con ipotenusa pari a 1, da cui:

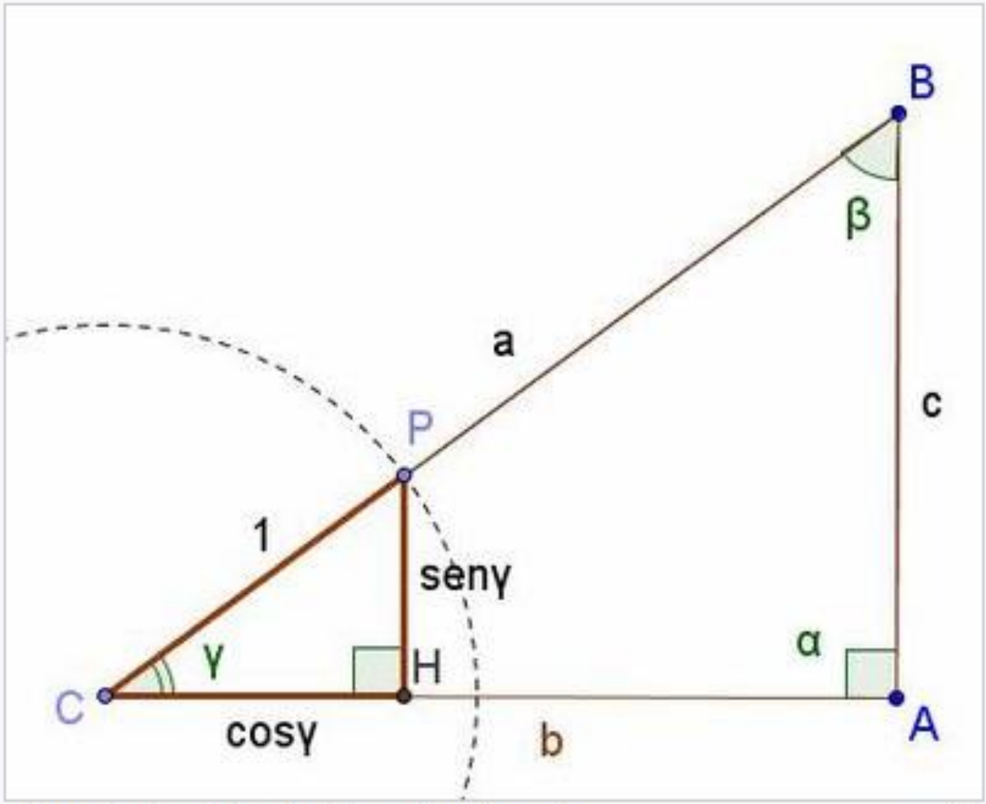
$\overline{CP} = 1$

$\overline{PH}$ =sen $\gamma < 1$

$\overline{CH}$ = cos $\gamma < 1$ o uguale a 1

Mai>1!

Seno e Coseno

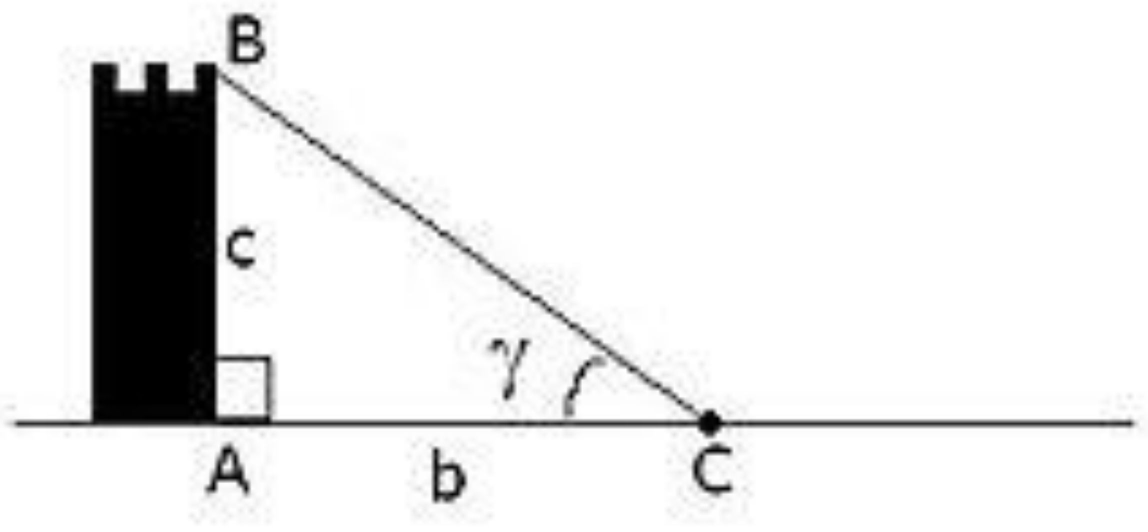


Dimostrazione formule triangolo rettangolo

$$\sin\gamma = \frac{PH}{PC} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\gamma = \frac{HC}{PC} = \frac{AC}{BC} = b/a$$

Seno e Coseno

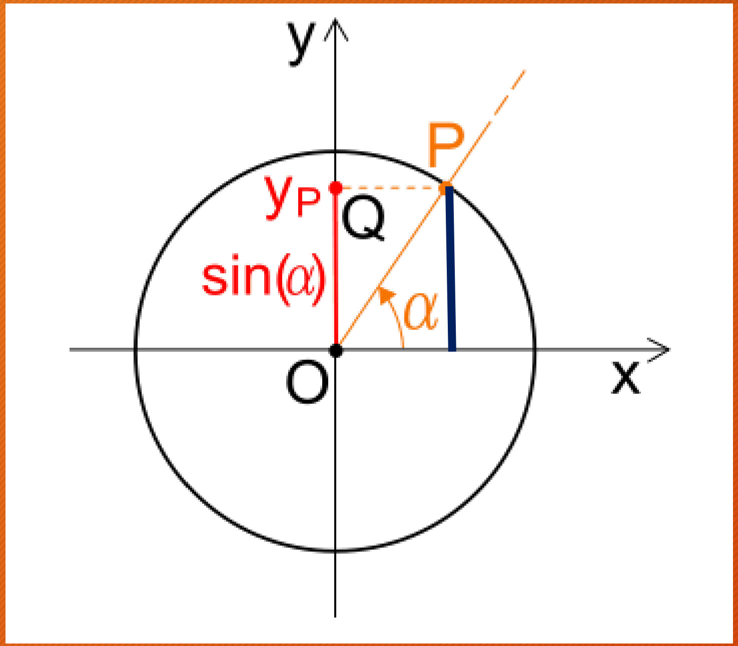


Calcolo altezza di una torre

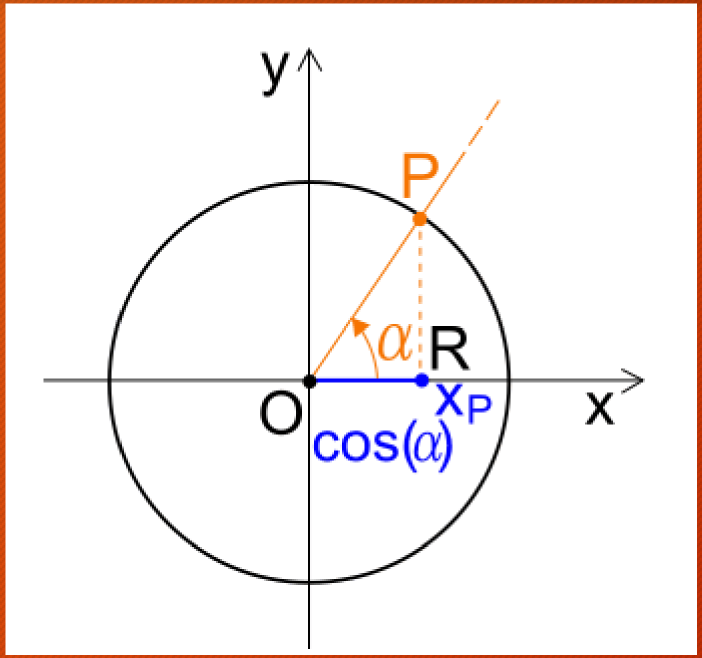
Basta misurare il cateto b e dal punto misurare l'angolo acuto γ sotto cui si vede la sommità della torre, B.
Applicando opportunamente le formule si ottiene

$$H_{torre} = c = b \tan \gamma$$

Seno e Coseno



$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} = y_P$$



$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \overline{OR} = x_P$$

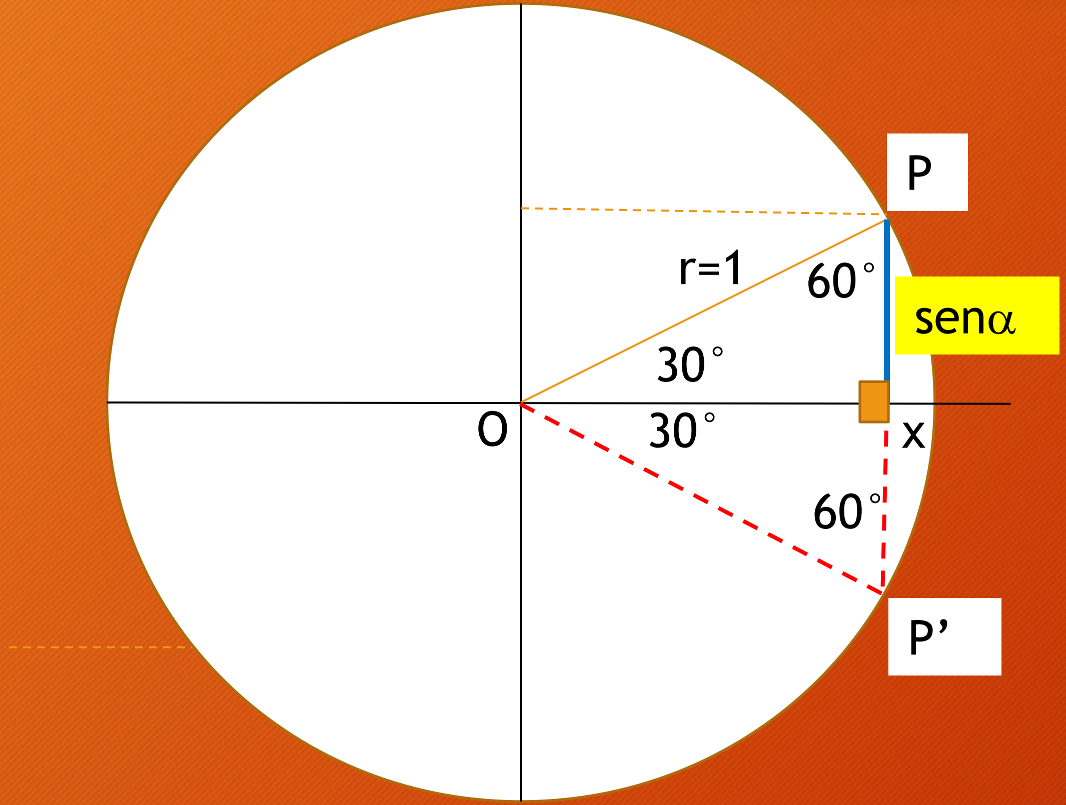
Prima relazione fondamentale

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

α (°)	α (rad)	sen α	cos α
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180°	π	0	−1

e goniometriche: seno e coseno ...

Esempio: calcolo del Sen 30°



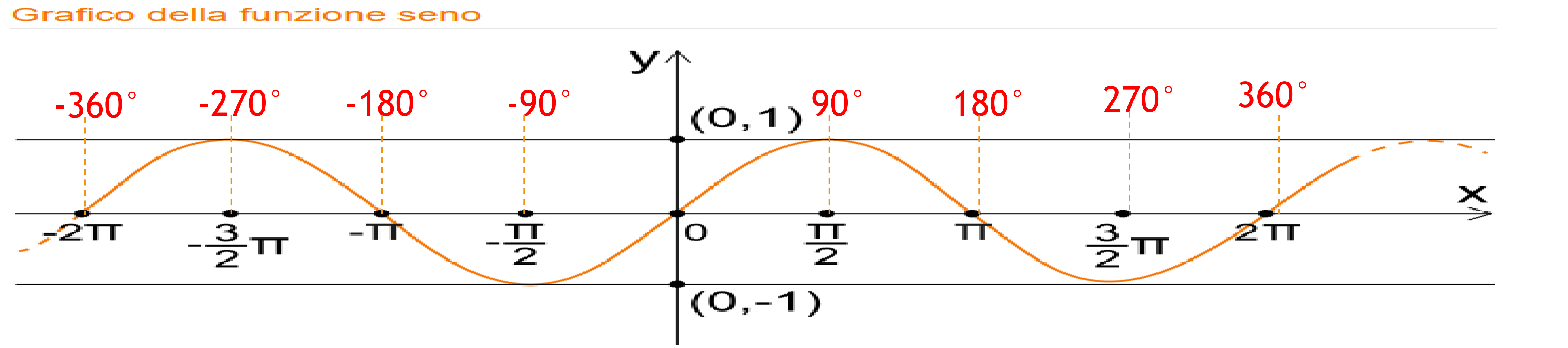
$\text{sen } 30° = \overline{PX}$
$r = \overline{PO} = 1$
$\overline{PP'} = 2\ \overline{PX}$
$\overline{PP'} = r$
-> $2\ \overline{PX} = r$; $\overline{PX} = \frac{r}{2} = 1/2 = \text{sen } 30°$

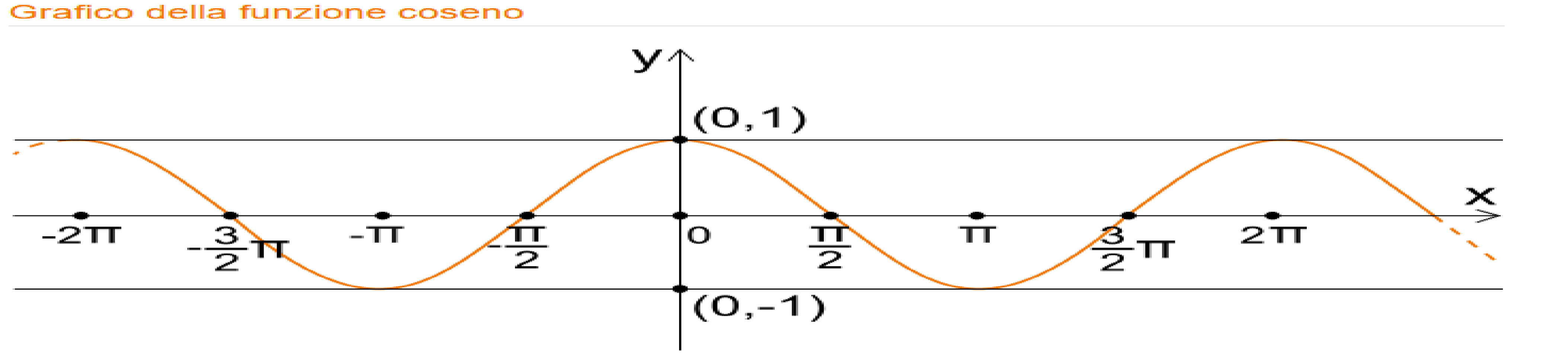
Seno e Coseno: Tabella

Grandi	Seno 0'	10'	20'	30'	40'	50'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	63
27	0,45399	0,45658	0,43917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,30252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,58160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						44
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	Gradi
	Coseno						

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA E TAB…

Seno e Coseno





Tangente: rapporto tra Seno e Coseno

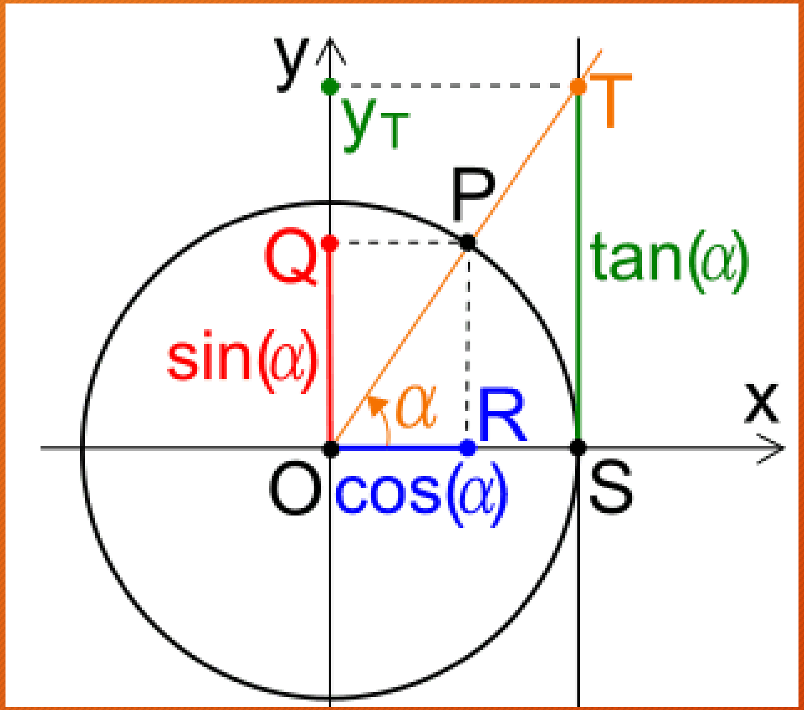
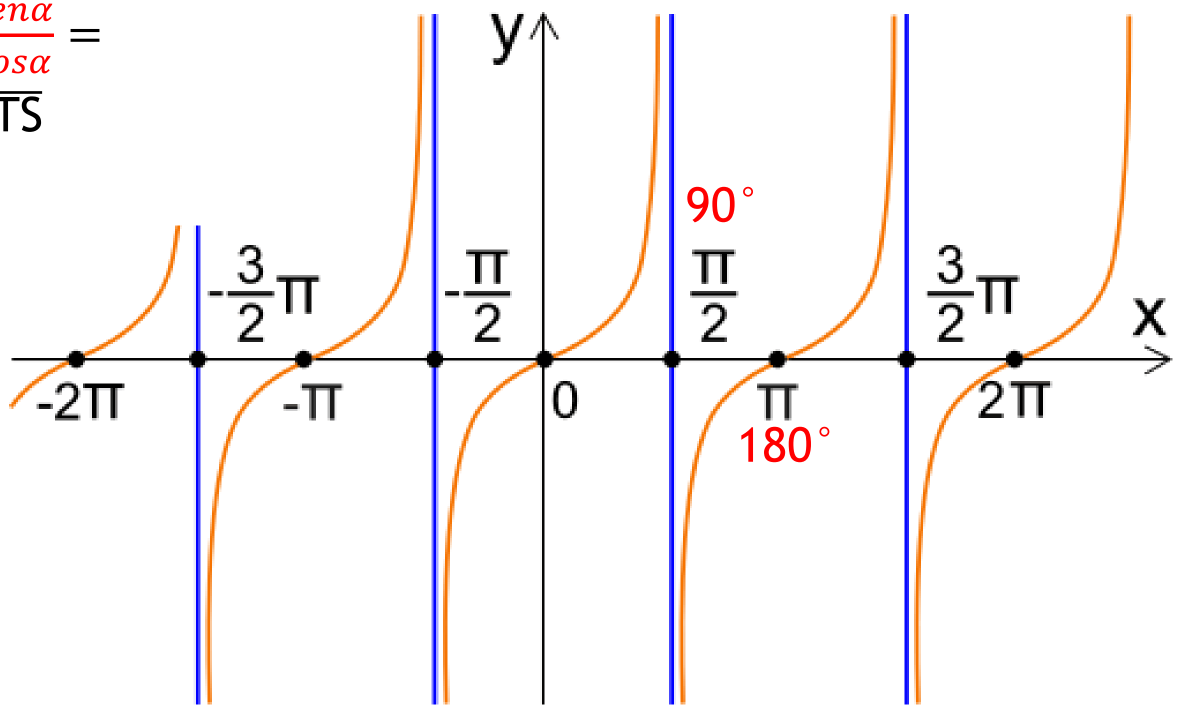
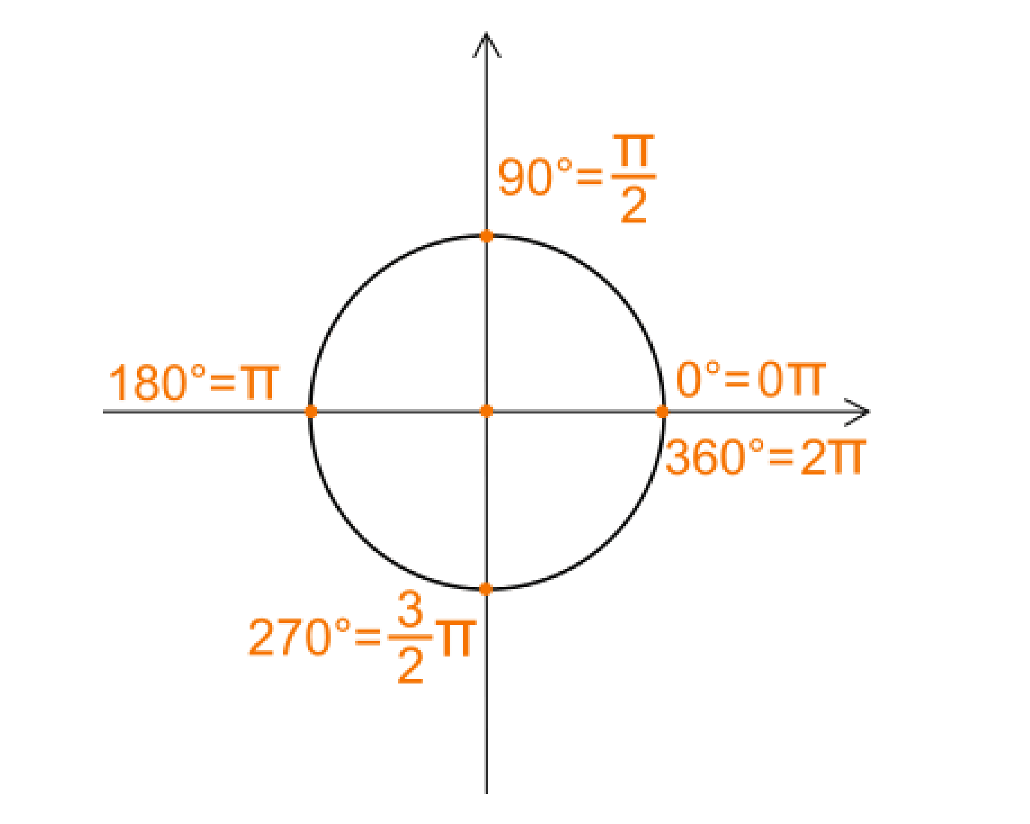


Grafico della funzione tangente

$$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\overline{TS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{TS}}{1} = \overline{TS}$$



Angoli in radianti e in gradi



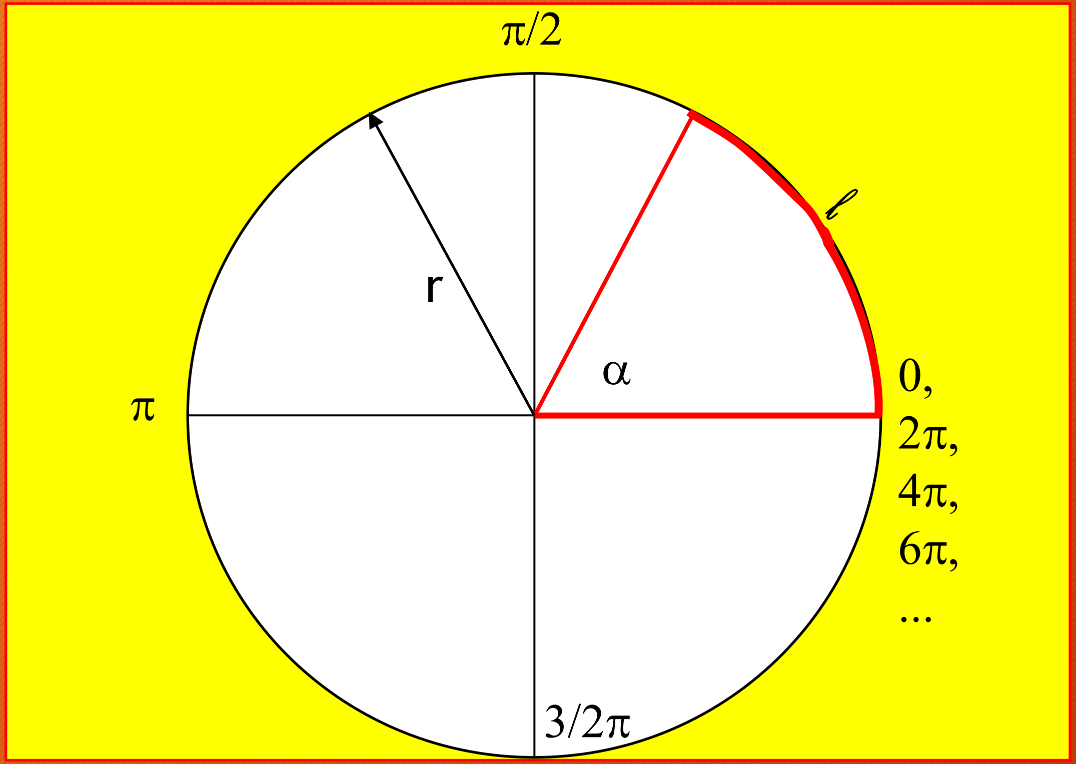
Relazione

$$\pi : 180^\circ = \alpha_{rad} : \alpha^\circ$$

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180} * \alpha^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} * \alpha_{rad}$$

Perché misurare in radianti?



Relazione

$\ell = \alpha\, r$ π=3,14

Se $\alpha=2\pi$ $\ell = 2\pi r$= 6,28 r intera circonferenza

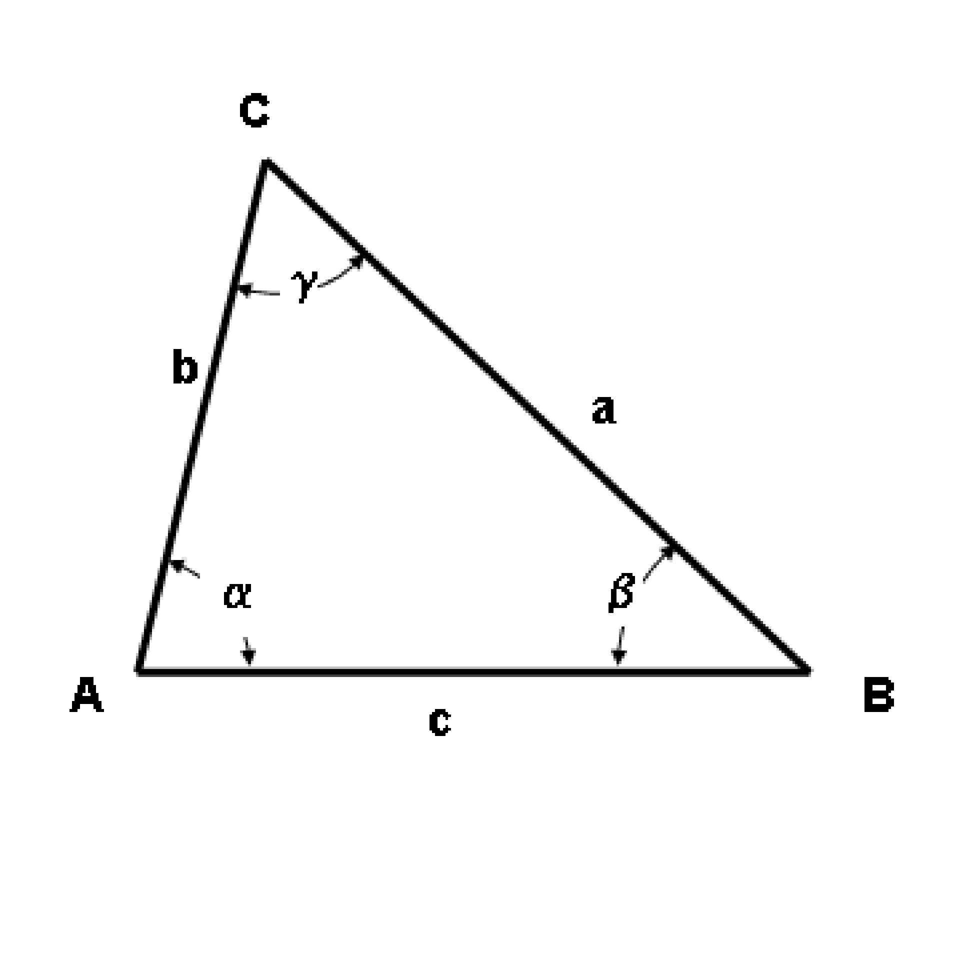
con r=1m $\ell =$ 6,28 m

Se $\alpha=\pi$ $\ell = \pi r$= 3,14 r metà circonferenza

Se α=30°= $\frac{\pi}{6} = \frac{3{,}14}{6} = 0{,}523$ $\ell = 0{,}523$ r

arco di circonferenza di 30°

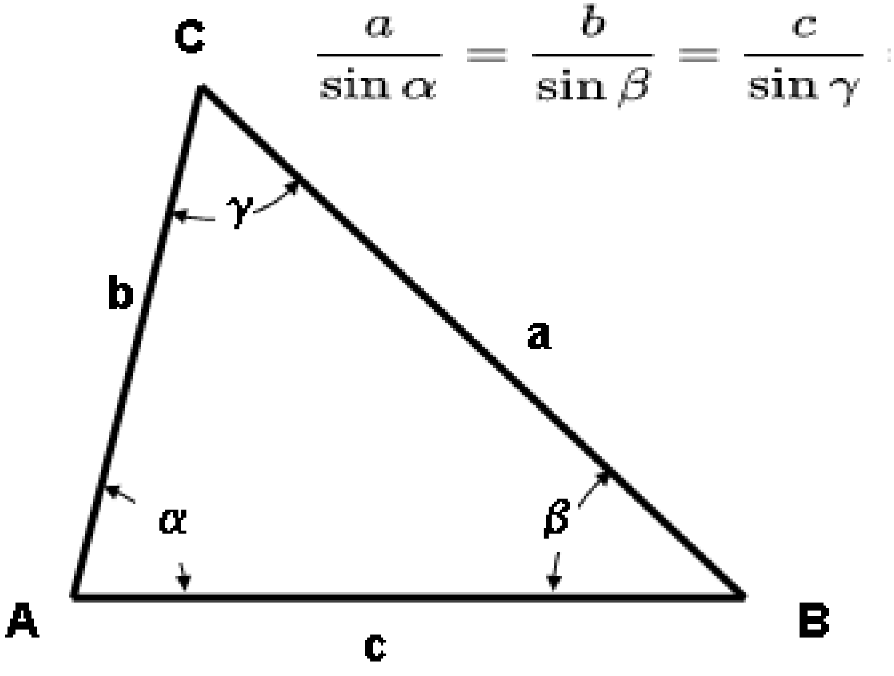
Teorema dei seni



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Teorema non dimostrato

Applicazione del Teorema dei seni



Dati:

α = 30°; β = 70°; c=10 cm

(tre dati di cui almeno una lunghezza)

Trovare:

γ = ? ; a = ? ; b = ? Perimetro e Area

Soluzione:

α+β+γ=180°

30°+ 70°+ γ =180°

100° + γ = 180° -→γ = 180°-100° = 80°

sen30° = 0,5; sen70° =0,94; sen80°=0,98

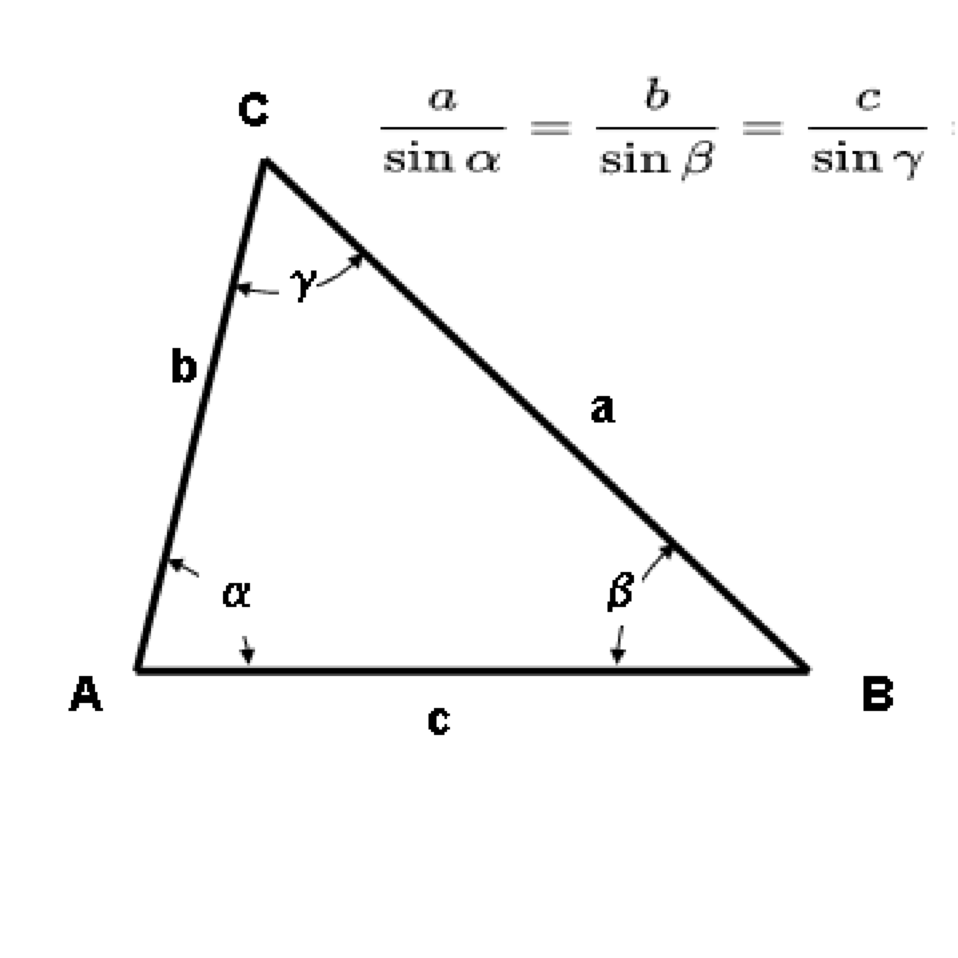
$$\frac{a}{sen30} = \frac{b}{sen70} = \frac{c}{sen80}$$

$\frac{a}{0{,}5} = \frac{b}{0{,}94} = \frac{10\ cm}{0{,}98} = 10{,}20$ cm

->> a=10,2*0,5 cm= 5,1 cm

->> b=10,2*0,94 cm= 9,59 cm

Applicazione. Continua



Dati:
$\alpha = 30^\circ$; $\beta = 70^\circ$; c=10 cm
Trovare:
γ = ? ; a = ? ; b = ? Perimetro e Area

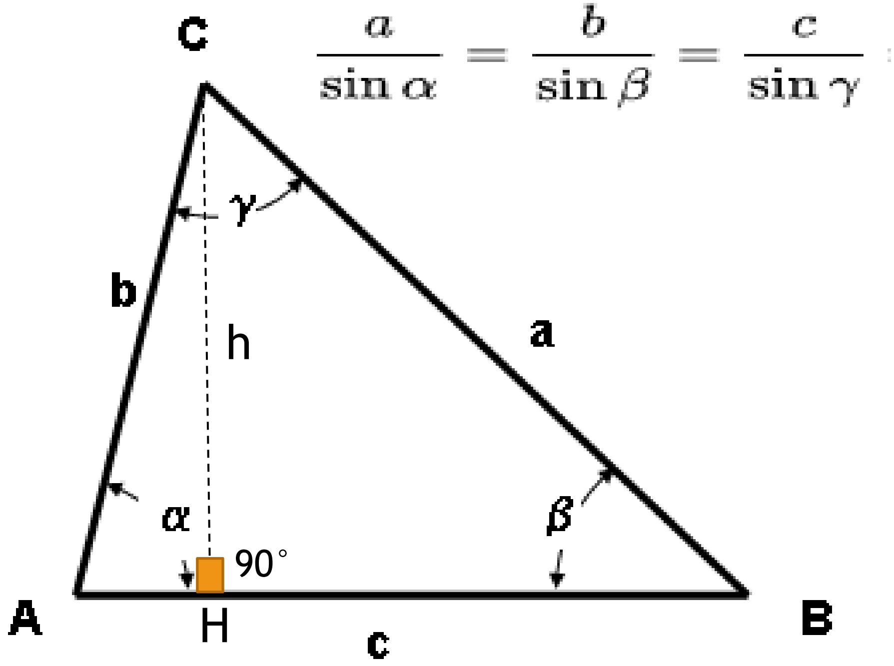
Soluzione:
-------- riporto:
a=5,1 cm; b=9,59 cm
sen30° = 0,5; sen70° =0,94; sen80°=0,98

Perimetro= (5,1+9,59+10) cm = 24,69 cm
Area =$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formula di Erone)

semi-perimetro= p = $\frac{Perimetro}{2} = \frac{24{,}69}{2}\ cm = 12{,}35\ cm$

$Area = \sqrt{12{,}34(12{,}34-5{,}1)(12{,}34-9{,}59)(12{,}34-10)}$ cm^2 =
$\sqrt{12{,}34 * 7{,}24 * 2{,}75 * 2{,}34}$ cm^2 = $\sqrt{574{,}91}$ cm^2 =
23,98 cm^2

Area del triangolo con il Teorema dei seni



Dati:

α = 30°; β = 70°; c=10 cm

-------- riporto:

a=5,1 cm; b=9,59 cm

$Area = 23{,}98\ \text{cm}^2$ (Formula di Erone)

Area= $\frac{base\ x\ altezza}{2} = \frac{c*h}{2}$

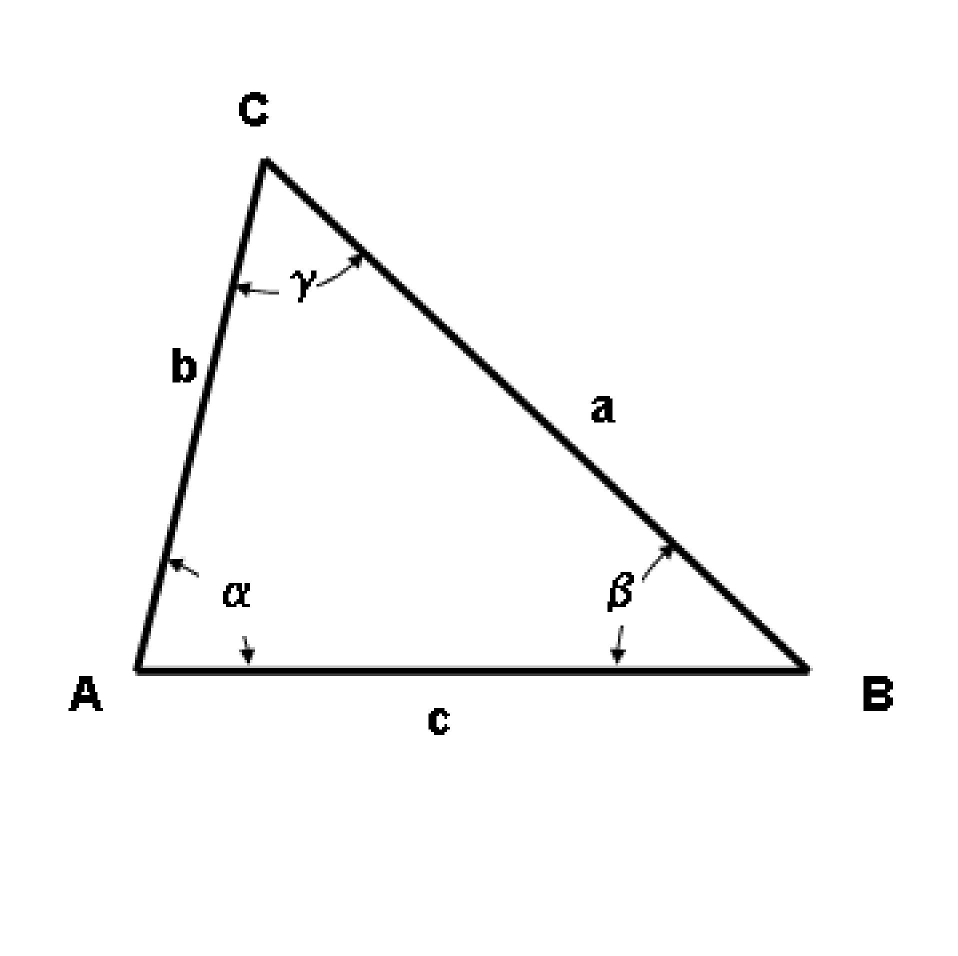
$\frac{b}{sen90°} = \frac{h}{sen\alpha}$; $\quad \frac{b}{sen90°} = \frac{9{,}59\ cm}{1} = 9{,}59\ cm$

$9{,}59\text{cm} = \frac{h}{sen\alpha} = \frac{h}{sen30}° = \frac{h}{0{,}5}$

$h = 9{,}59cm * 0{,}5 = 4{,}8cm$

Area= $\frac{base\ x\ altezza}{2} = \frac{\text{c*h}}{2} = \frac{10*4{,}8}{2}\text{cm}^2 = 24\text{cm}^2$

Teorema di Carnot



Dati i tre lati determinare gli angoli

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ -> $\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ -> $\cos \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2bc}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ -> $\cos \alpha = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

E' una generalizzazione del teorema di Pitagora perché si applica a tutti i triangoli.

Teorema non dimostrato

Aristarco di Samo (310-230 a.C)

Opere

2.1 La teoria eliocentrica

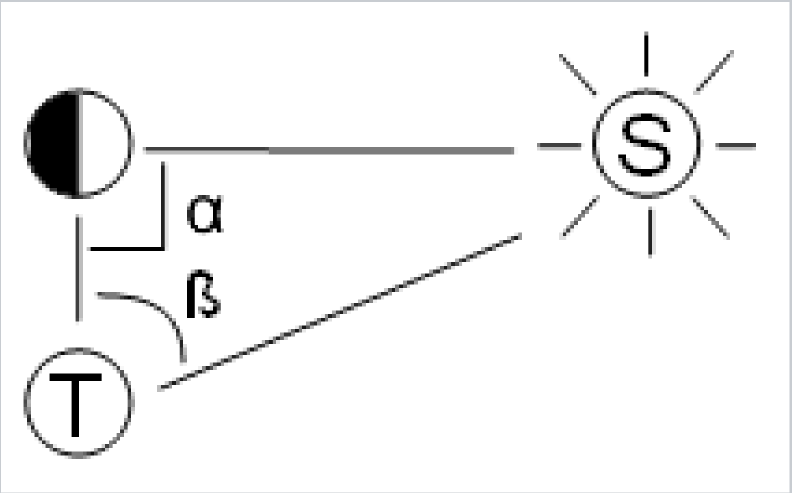
2.2 *Dimensioni e distanze del Sole e della Luna*

Nato a Samo, una delle maggiori isole in prossimità della costa della Ionia, Aristarco studiò ad Alessandria, dove ebbe come maestro Stratone di Lampsaco.

Per le sue teorie si diceva che meritasse la condanna per empietà, come riporta Giacomo Leopardi nella sua *Storia dell'astronomia*:

> «Altro astronomo greco fu Aristarco, vissuto, come credesi, verso il 264 avanti Gesù Cristo, benché considerevolmente più antico lo facciano il Fromondo e il Simmler presso il Vossio, ripresi però dal Fabricio. Di lui fecer menzione Vitruvio, Tolomeo e Varrone presso Gellio nel quale, in luogo di Aristide Samio, è da leggersi Aristarco. Egli determinò la distanza del Sole dalla Terra, che egli credé 19 volte maggiore di quella della Terra medesima dalla Luna e trovò la distanza della Terra dalla Luna, di 56 semidiametri del nostro globo. Credette che il diametro del sole fosse non più che 6 o 7 volte maggiore di quello della Terra e che quello della Luna fosse circa un terzo di quello della Terra medesima. Fu dogma di Aristarco il moto della Terra, ed egli, per tale opinione, reputossi da Cleante reo di empietà, quasi avesse turbato il riposo dei Lari e di Vesta. Sembra che Plutarco asserisca essere stato Cleante e non Aristarco il fautore del moto della Terra, così leggesi nel suo libro De facie in orbe Lunae.»

Distanze del Sole e della Luna



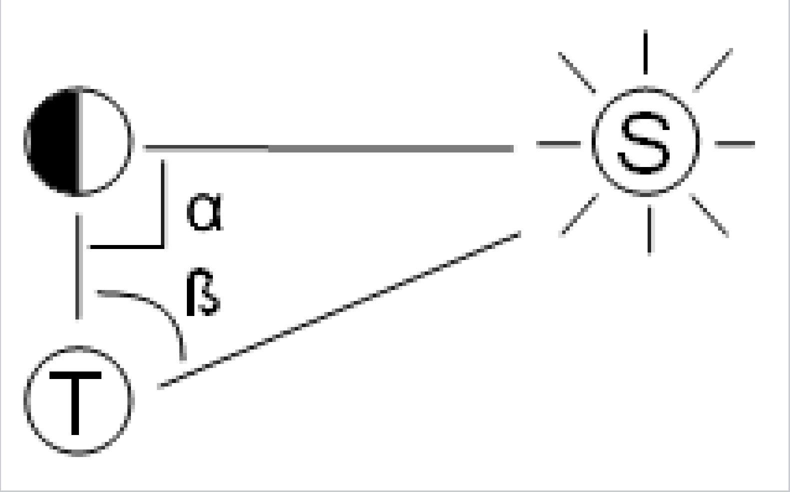
Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Quando la Luna è in quadratura, ossia è illuminata per metà, essa, con la Terra e il Sole, forma il triangolo rettangolo mostrato in figura. Misurando in tale condizione l'angolo ß compreso tra la direzione Terra-Sole e la direzione Terra-Luna è possibile calcolare il rapporto tra le loro distanze mediante ragionamenti di tipo geometrico. Il problema risolto da Aristarco, di calcolare (o meglio, stimare sia per eccesso che per difetto) il rapporto tra i cateti di un triangolo del quale si conoscono gli angoli, equivale in termini attuali a calcolare, o stimare, la tangente trigonometrica di un angolo. L'opera di Aristarco può pertanto essere considerata una delle prime opere di trigonometria[

$\tan \beta$ = distanza Luna-Sole/distanza Luna-Terra

Aristarco stimò il rapporto tra le distanze del Sole e della Luna come compreso tra 18 e 20, mentre il rapporto tra le distanze medie è in realtà circa 400

Distanze del Sole e della Luna



Terra, Luna e Sole durante una quadratura

Distanza Sole -Terra= 150 milioni di km =150*10^6 km

Distanza Luna -Terra= 384400 km =3,844*10^5 km

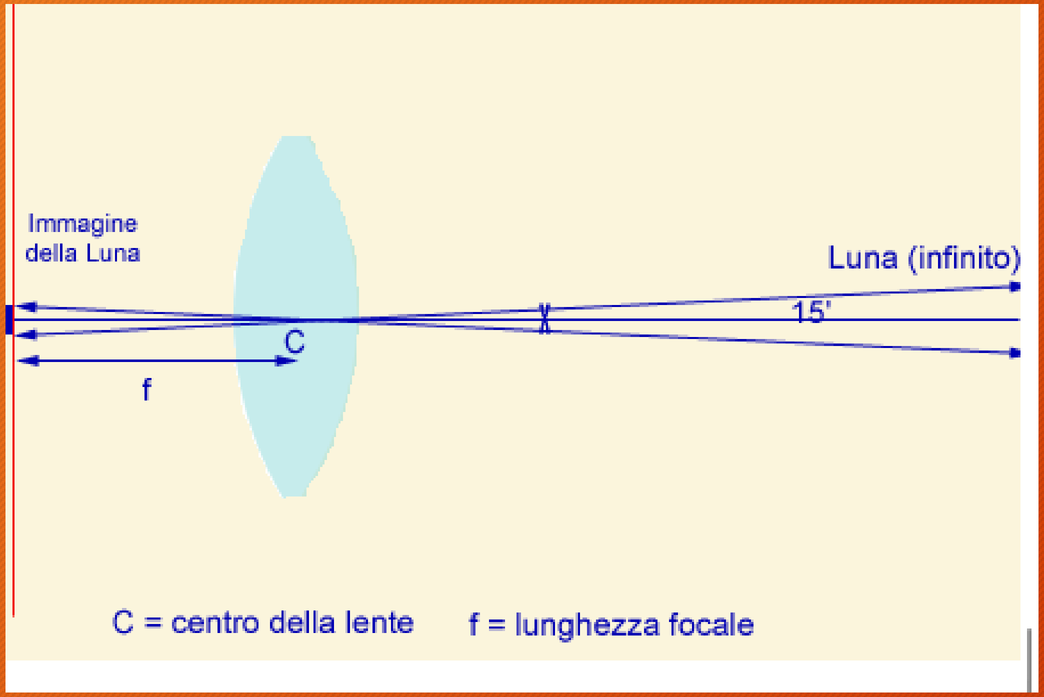
$$\cos\beta = \frac{Luna - Terra}{Sole - Terra} = \frac{3{,}844 * 10^5}{150 * 10^6} = 0{,}00256$$

$$\beta = \cos^{-1}(\cos\beta) = \cos^{-1} 0{,}00256 = 89{,}853°$$

$$\tan\beta = \tan 89{,}853° = 389{,}77 = \frac{Luna - Sole}{Luna - Terra}$$

$Luna - Sole$ =389,77*Luna-Terra=389,77 * 384400km=149827588km=149,83*10^6km

Macchina fotografica



Se la distanza dell'oggetto inquadrato dalla macchona fotografica è ad una distanza maggiore di 10 volte la distanza focale dell'obiettivo, allora l'immagine si forma (approssimativamente) sul piano focale

Osservando la figura ricaviamo che

$$\tan 15' = tan\ 0{,}25° = \frac{metà\ immagine}{focale} = 0{,}00436$$

Immagine= 2*0,00436* focale= 0,00872*focale
se la focale è 50mm l'immagine è 0,00872*50mm= 0,4mm
se la focale è 300mm l'immagine è 0,00872*300mm= 2,6mm

Con una macchina fotografica 36x24, full frame, la massima dimensione per non tagliare l'immagine è 24mm- La massima focale potrà essere:
f= 24mm/0,00872=2752mm

Grazie