INDICE 3

Provare a osservare lo spazio

Riassunto delle precedenti lezioni I e II

L'Infinito e gli Infinitesimi

- L'infinito nella cultura greca
- Paradosso della Molteplicità e del Movimento
- Achille raggiungerà la Tartaruga

Applicazione: Troviamo l'area del cerchio

Riassunto delle prime due lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- l'unità di misura
- Lo strumento di misura (il metro rigido, il quadrato, il cubo)
- La dimensione
- Metodi per misurare: uso del triangolo

Difficoltà

- Gli oggetti da misurare sono curvi (Lez. I, II, III)
- Gli strumenti di misura sono più lunghi o più corti dell'oggetto da misurare (Lez. I,II)
- Modifica dello strumento di misura: infinitesimi e infinito(Lez. II, III)
- Non basta misurare le lunghezze bisogna conoscere anche gli angoli. (Lez. I)

Riassunto delle prime due lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- L'Approssimazione
- Il Valor Medio, la Varianza e la Gaussiana
- Concetto di dimensione non intera: i frattali
- Metodo di esaustione
- Valutazione di π

Difficoltà

- Somme infinite (Lez. II,III)

Proviamo a osservare lo Spazio: l’Infinito e gli Infinitesimi

Nella cultura greca

Nasce come problema connaturato all'uomo e si pone però immediatamente sotto il segno dell'inconoscibilità, del mistero: per questo reca sgomento.

Non essere, Imperfezione, Mancanza di forma, Indeterminato

E’ la sfera il massimo simbolo di perfezione.
Il suo essere necessario, compiuto, unico, finito è infatti paragonato a una "massa di una ben rotonda sfera« (Parmenide: VI-V a.c)- (Aristotele, IV a.c.)

Dividiamo lo spazio…
Il metodo di Archimede

Mah…. Ma Ripartiamo dalla fine dell'ultima lezione.

Abbiamo visto come determinare π.
Per continue approssimazioni della Circonferenza con Poligoni aventi un numeri di lati sempre maggiore, tendente all'infinito

Dunque l'infinito non comporta solo imperferzione, ideterminazione.
Non causa solo angoscia

"NAUFRAGAR M E' DOLCE IN QUESTO MARE". (L'infinito. G. Leopardi)

può portare anche serenità …….. conoscenza

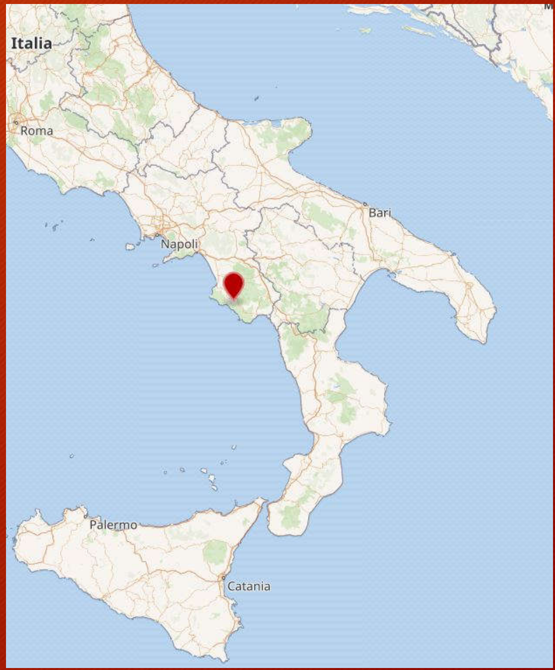
Ma partiamo dall'inizio!

I filosofi greci dell’Infinito e degli Infinitesimi

- Parmenide e Zenone di Elea

  Nascono ad Elea un'antica polis della Magna Grecia. Nel comune di Ascea, in provincia di Salerno, all'interno del Parco nazionale del Cilento.

- Sono i maggiori filosofi del VI secolo a.c.

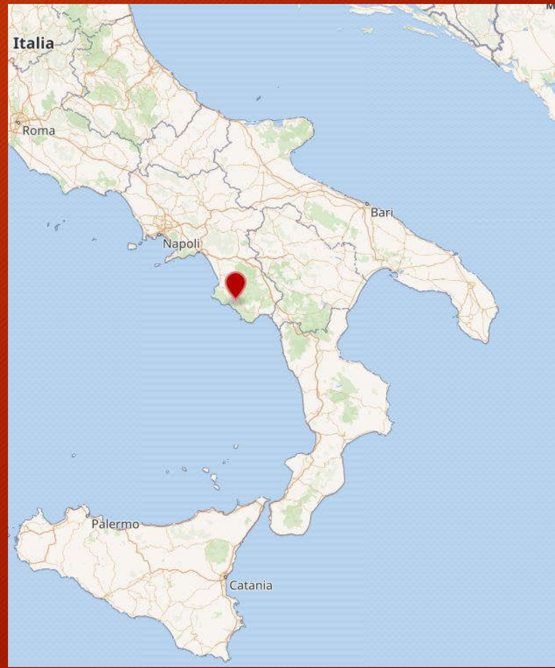


L’apparenza della Realtà, dell’Osservazione

- Parmenide e Zenone di Elea

  «
  Solamente l’essere uno ed immobile è reale.

  Molteplicità e movimento sono semplicemente apparenza sensibile.
  »



Il Paradosso

- Zenone di Elea usava il Paradosso, che è un ragionamento per assurdo, contrario all'opinione comune, che serve a dimostrare in modo indiretto una verità.

  Se - Non A - è falsa allora - A - è vera.

  Ecco come procede il ragionamento di Zenone

L’apparenza della Molteciplità

- Se le cose sono molteplici, avendo carattere materiale, ciascuna cosa è estesa, continua e divisibile all’infinito.

  Gli infiniti punti in cui le cose si risolvono o sono estesi o non hanno estensione

  Nel primo caso cose costituite di infiniti punti estesi dotati di grandezza sarebbero infinitamente grandi, e nel secondo caso cose costituite di punti privi di estensione e grandezza avrebbero grandezza nulla

Solo l’unicità è vera

- Ne consegue che la molteplicità è falsa dato che con i Punti di dimensione nulla o non nulla, le cose non avrebbero l’estensione finita richiesta dalla loro molteplicità.

- Dato che la MOLTEPLICITA’ (Non A) è FALSO allora l’UNITA’ dell’essere è VERO

L’apparenza del Movimento

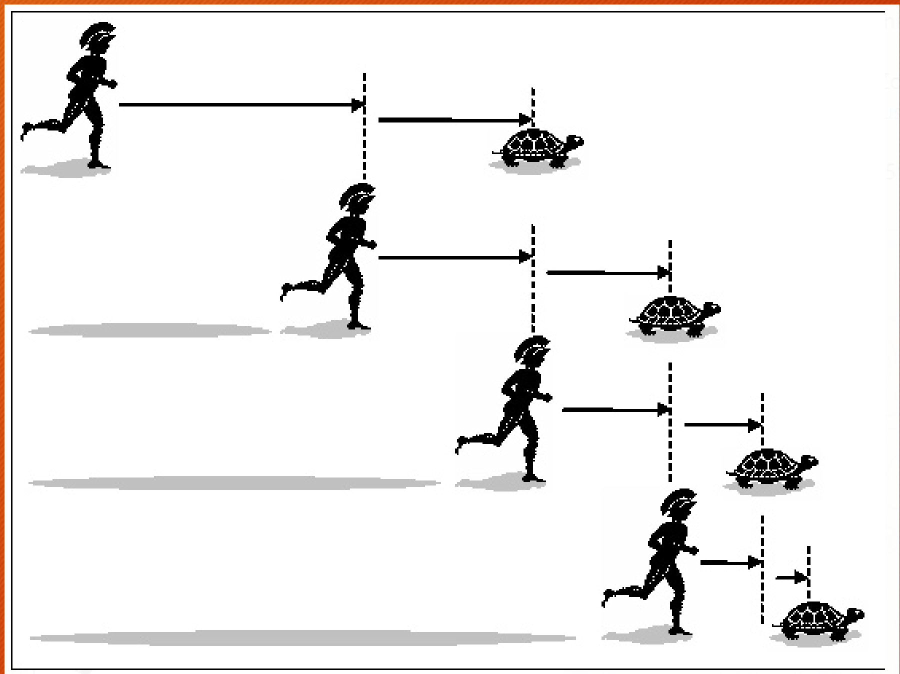
- Un ragionamento simile userà Zenone per negare il movimento.

Se le cose si muovono, essendo lo spazio ed il tempo divisibili all’infinito, una distanza AB può essere coperta soltanto coprendone prima almeno la metà, poi la metà della seconda metà e man mano la metà delle infinite e quindi inesauribili metà successive.

Da cui il Paradosso di Achille che non raggiungerà mai la lenta tartaruga.

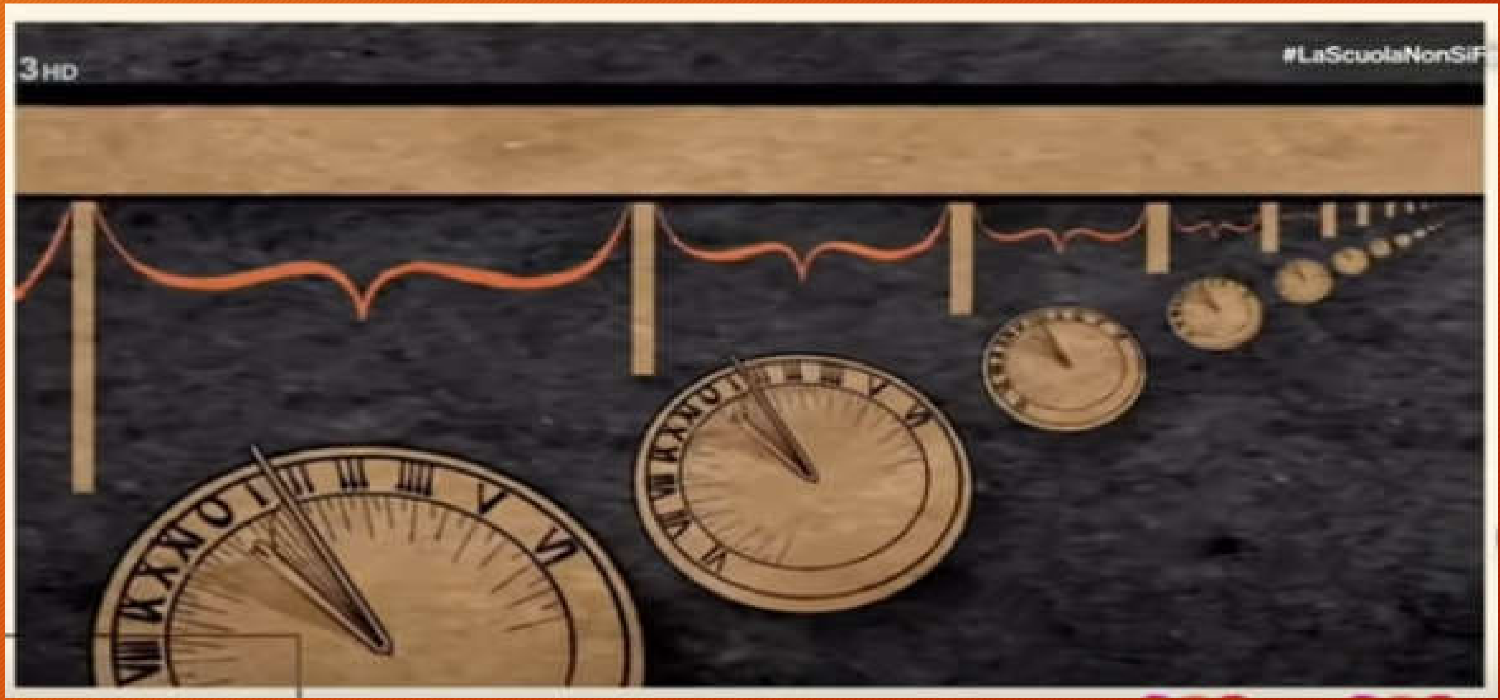
Zenone: la suddivisione infinta del movimento

- Così per Zenone il rapidissimo Achille, il piè veloce, non raggiungerà nella corsa la lentissima tartaruga partita prima di lui.



La suddivisione infinita del Tempo

Spazio infinito ------→ Tempo infinito!



Achille,
il piè veloce,
non raggiungerà
mai la lentissima
tartaruga

Il superamento del Paradosso

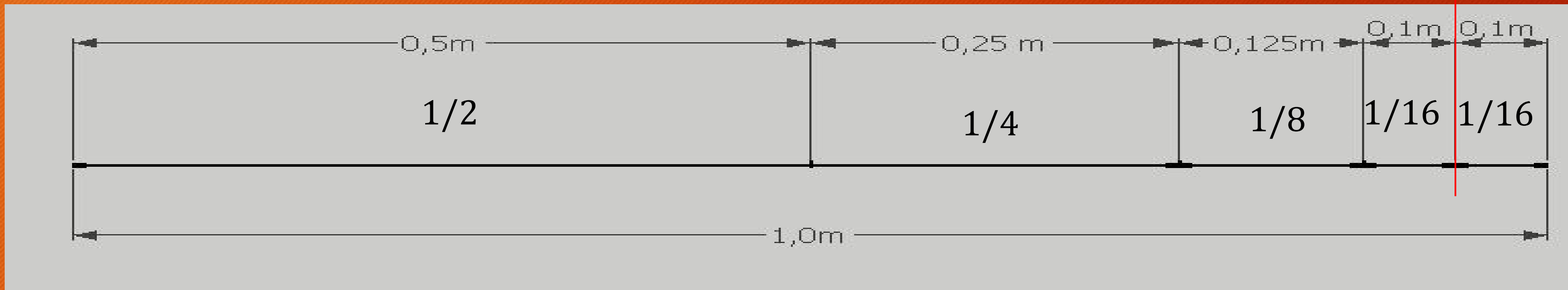
- Ma non è proprio così……..

In realtà la somma di infiniti addendi non deve essere necessariamente infinita: al tendere di *n* all'infinito la serie geometrica di ragione 1/2 tende ad 1: 1 è matematicamente il limite finito di questa serie convergente

Consentitemi un'osservazione (non mia): La geometria sembra essere un ostacolo alla comprensione della realtà, mentre oggi ad essa ci si rivolge con fiducia per capire cosa ci accade intorno.

La Misura: Infinito e Infinitesimi

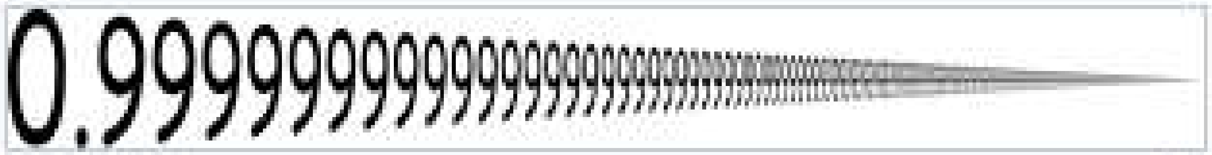
- La somma di INFINITI INFINITESIMI può dare una misura finita:



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\frac{1}{2048}=1-\frac{1}{2048}$ =0,99951 $\longrightarrow$ Tende a 1

con un numero di suddivisioni che tende all'INFINITO!!!!
di misura sempre più piccola,INFINITESIMA!!!

L'Infinito e gli Infinitesimi: Rappresentazione

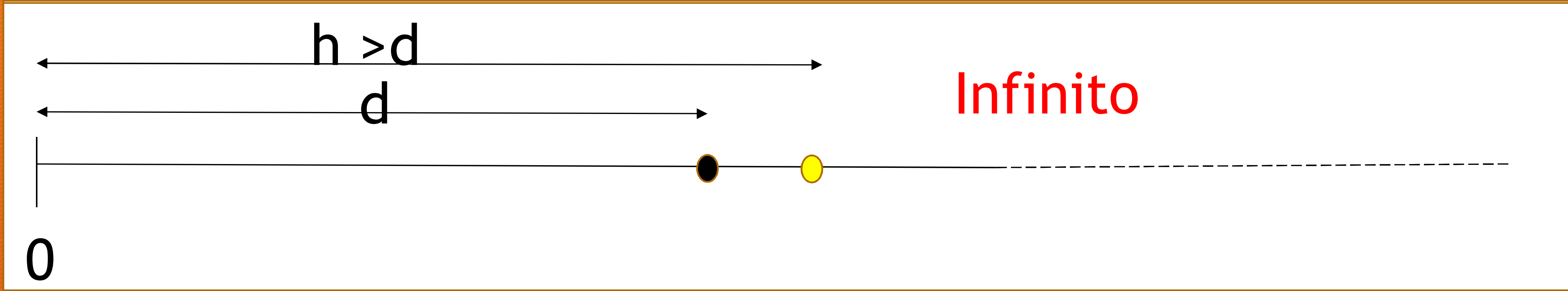


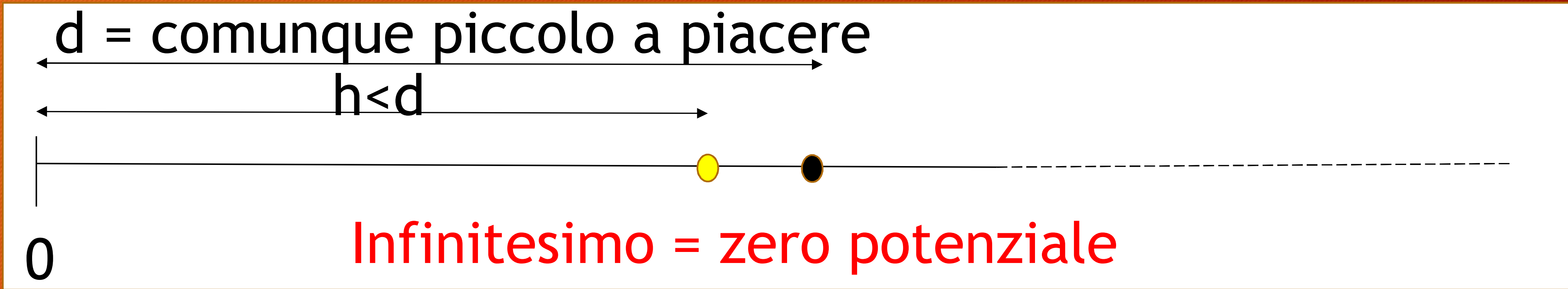
Rappresentazione artistica dell'uguaglianza tra 0,999... e 1

Aumentando il numero di 9 ci si avvicina sempre di più ad 1. Con INFINITI 9 il numero decimale diviene =1

Aumentando il numero di 9 La differenza con 1 diviene sempre più piccola, INFINITESIMA

L’Infinito e gli Infinitesimi: Interpretazione



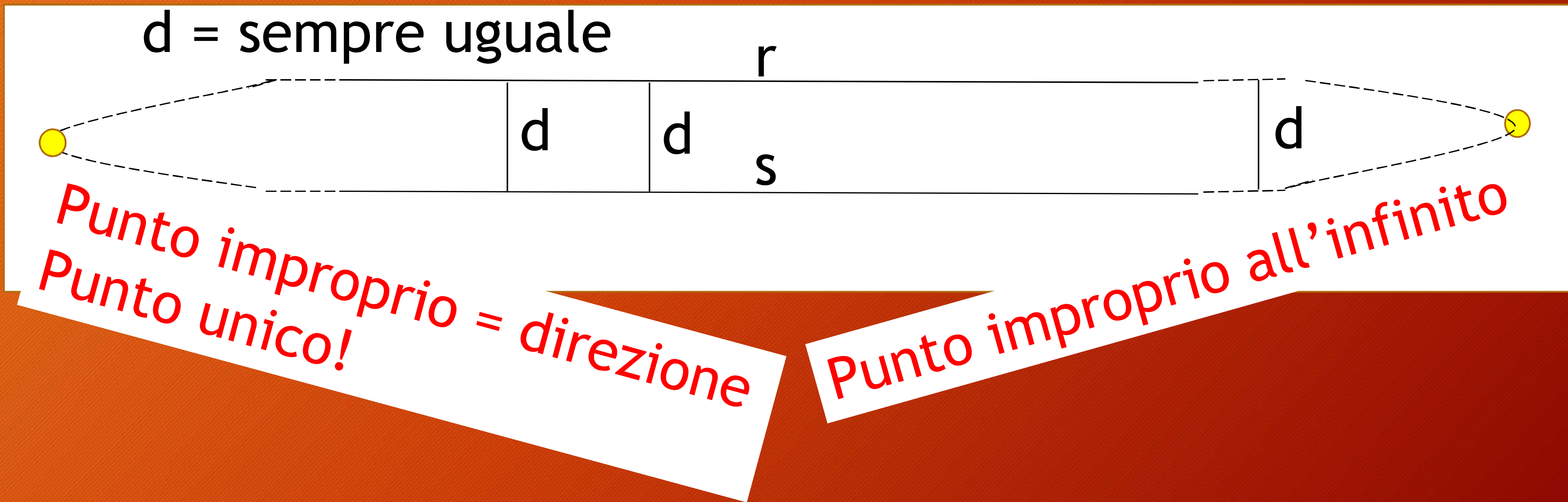


Infinito: una rappresentazione ottica

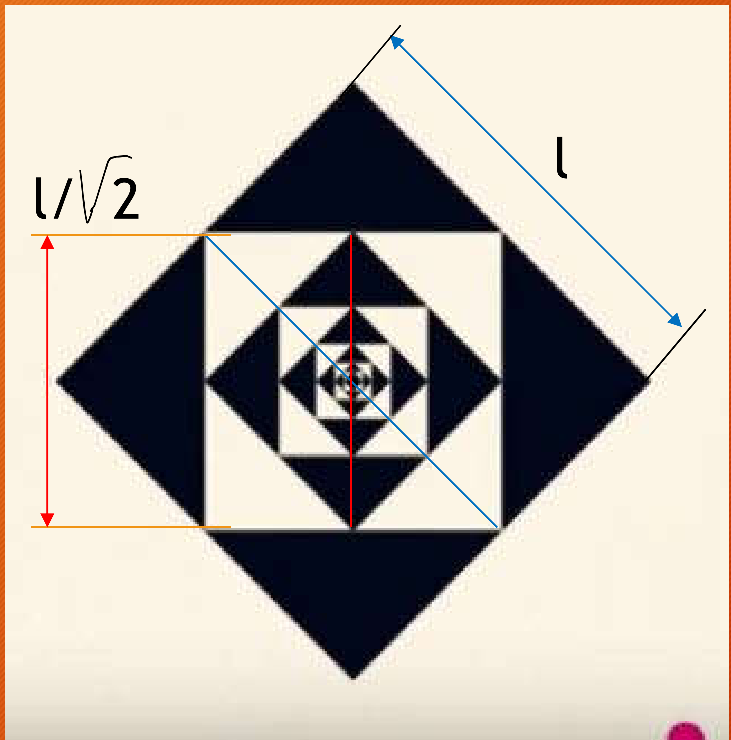
Punto improprio all'infinito.

Brunelleschi (Firenze, 1377–Firenze, 15 Aprile 1446)

Infinito: una interpretazione geometrica



Infinito: una costruzione geometrica



Quadrati telescopici!

I lati dei quadrati neri sono le diagonali dei quadrati bianchi

e

i lati dei quadrati bianchi sono le diagonali dei quadrati neri.

I lato e la diagonale del quadrato sono incommensurabili

Di nuovo π

Leibnitz

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \dots \dots$$

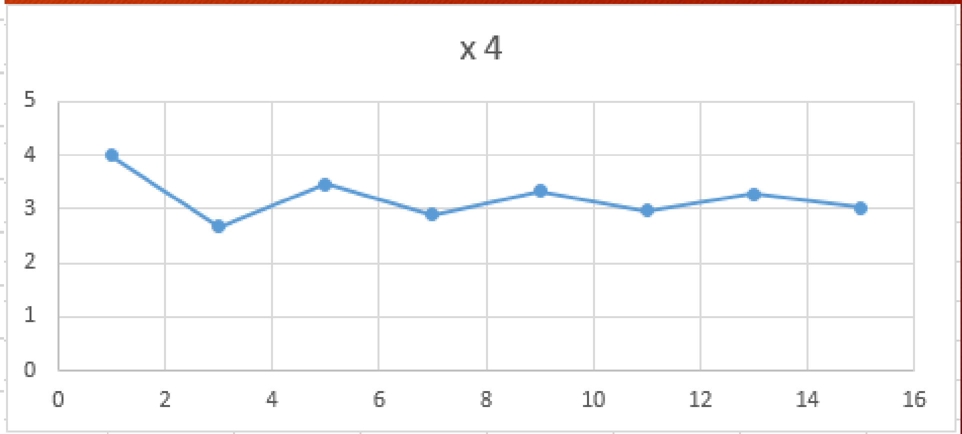
Una somma infinita di numeri inversi di tutti i numeri dispari si avvicina sempre di più a p, fino a raggiungerlo quando i termini divengono infiniti!

Di nuovo π!

Leibnitz

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots\ldots = 3{,}14159\ldots.$$

N	π/4		x 4
1	1/1	1,0000000	4
3	1/1-1/3	0,6666667	2,666667
5	1/1-1/4+1/5	0,8666667	3,466667
7	1/1-1/4+1/5-1/7	0,7238095	2,895238
9	1/1-1/4+1/5-1/7+1/9	0,8349206	3,339683
11	1/1-1/4+1/5-1/7+1/9-1/11	0,7440115	2,976046
13	1/1-1/4+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13	0,8209346	3,283738
15	1/1-1/4+1/5-1/7+1/9-1/11+1/13-1/15	0,7542680	3,017072



L’Infinito: una descrizione. Cantor (1845-1918)

Un uomo possiede un albergo con un numero di stanze infinito, e l’albergo è al completo. Arriva un altro ospite. L’albergatore sposta allora l’ospite della stanza 1 nella stanza 2, quello della 2 nella 3, quello della 3 nella 4, e via di seguito. Così la stanza 1 rimane libera per il nuovo ospite. E così via per ogni nuovo ospite che arriva.

L'Infinito: un uso pratico. Cantor

Come liberare infinite stanze per accogliere infiniti nuovi ospiti!

L’Infinito: Quando un insieme è infinito?

In base a quanto appena detto saremmo in grado di stabilire se un insieme di tantissimi elementi è infinito?

Come possiamo stabilire se i granelli di sabbia della spiaggia sono infiniti?

Li contiamo?

Siamo sicuri di riuscirci in un tempo ragionevole?

un insieme è infinito se esiste un'applicazione biunivoca di in un suo sottoinsieme proprio .

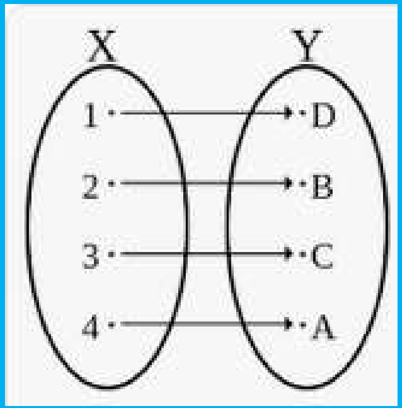
L'Infinito: Un metodo per comprendere l'infinito

Esiste un metodo con cui posso valutare che un insieme di elementi è infinito in modo semplice e veloce?

SI'!

La Corrispondenza

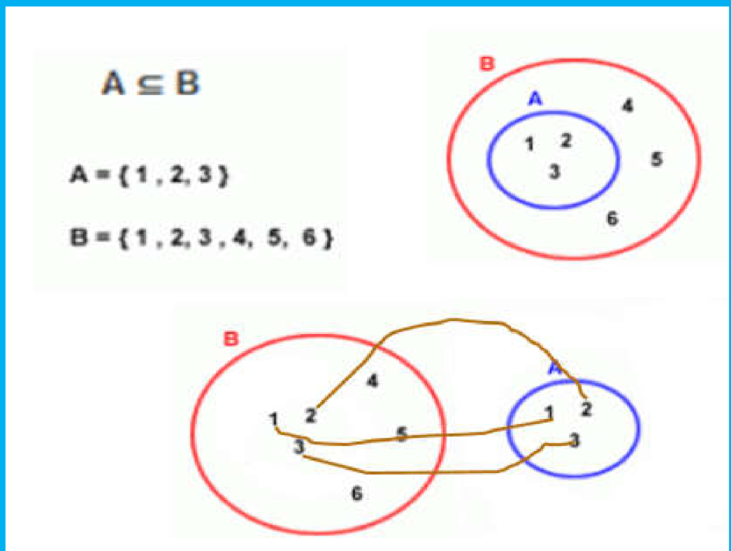
Esempio di corrispondenza biunivoca



Corrispondenza biunivoca: ad ogni elemento dell'insieme X corrisponde un unico elemento dell'insieme Y e ad ogni elemento dell'insieme Y corrisponde un unico elemento dell'insieme X

La Corripondenza:un metodo per comprendere l’infinito

Un insieme è infinito se esiste un’applicazione biunivoca con un suo sottoinsieme (proprio).



- L’insieme A è contenuto nell’Insieme B.

L’insieme A è un sottoinsieme (proprio) di B

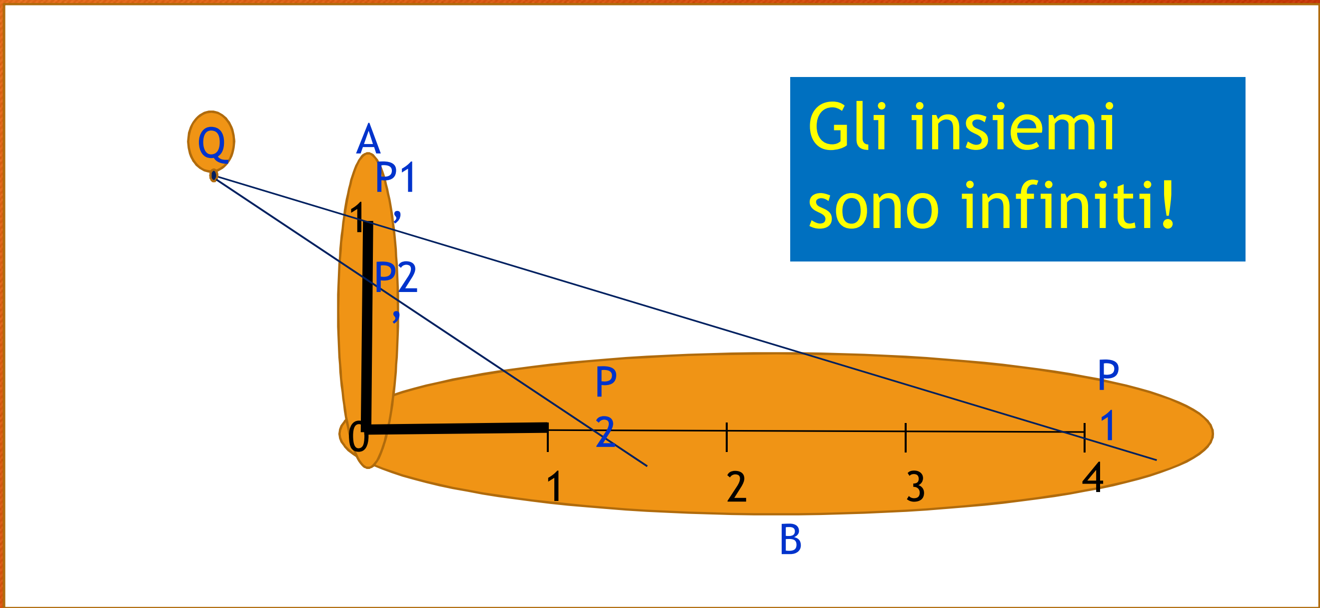
Posso metter in corrispondenza biunivoca tutti gli elementi dei due insiemi?

No. Gli elementi $\{4, 5,6\}$ non hanno corrispondenze

Allora gli insiemi non sono infiniti!

L'Infinito: una corrispondenza biunivoca tra insieme e sottoinsieme (proprio)

Un insieme è infinito se esiste un'applicazione biunivoca con un suo sottoinsieme (proprio).



Un sottoinsieme si dice PROPRIO se:
- non è vuoto
- tutti i suoi elementi sono una parte dell'insieme

La misura dell’area del cerchio

- ESEMPIO
  applicazione del metodo degli Infinitesimi e dell’Infinito al calcolo dell’area del cerchio.

L’Area del cerchio

- a) Partiamo da un risultato già noto, la misura della Circonferenza:

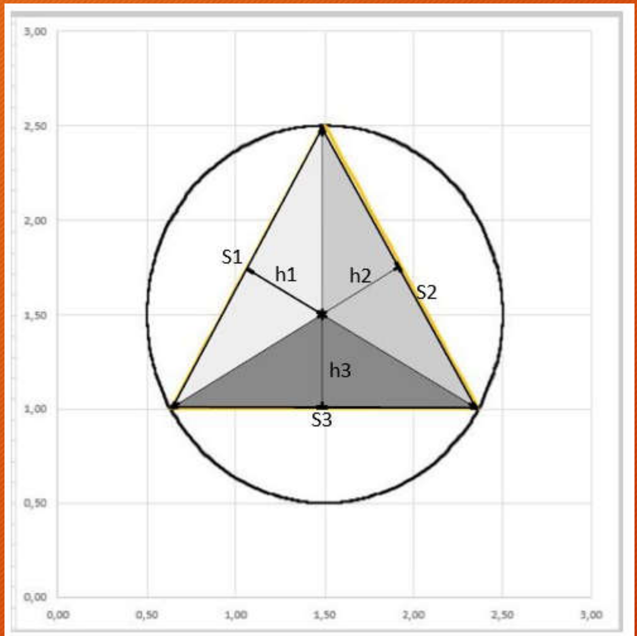
$$C= 2\pi R$$

b) Dimostreremo che l’area (superficie) del cerchio è:

$$S= \pi R^2$$

L’Area del cerchio

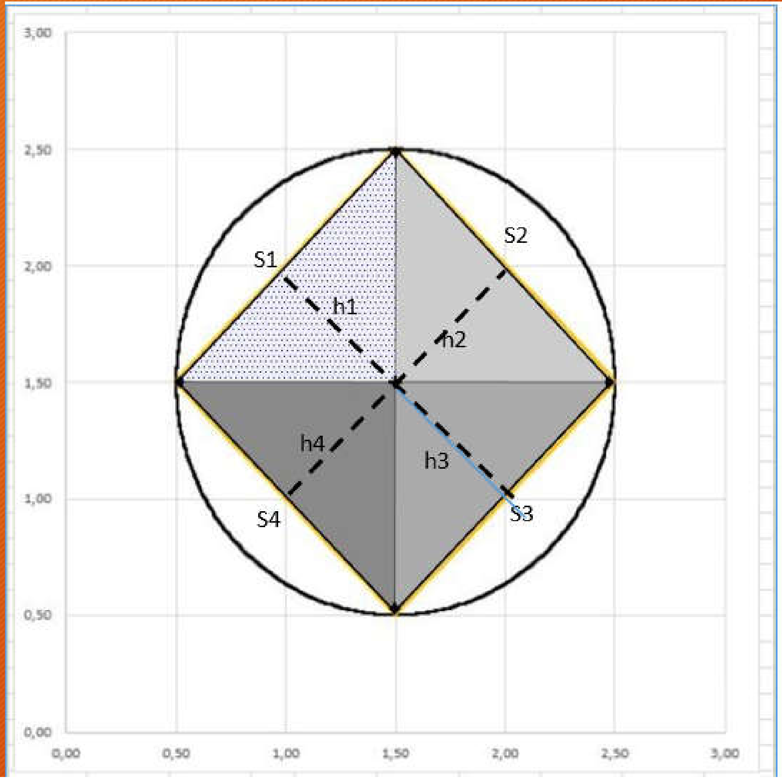
- a) Iniziamo inscrivendo un triangolo equilatero in una circonferenza di raggio r



- b) La circonferenza è così divisa in tre archi uguali di lunghezza l a cui sostituiamo i tre lati del triangolo S1,S2 e S3 che sono anch’essi uguali ad «S» e costituenti le basi dei tre triangoli.
- c) I tre triangoli hanno altezza h1, h2 e h3 che sono tutte uguali. Ricordiamo che l’area di un triangolo è:
  $$A = base * \frac{altezza}{2}$$
- d) L’area dei triangoli, uguali è:
  $$A = s1 * \frac{h1}{2} + s2* \frac{h2}{2} + s3*\frac{h3}{2} = 3*(s* \frac{h}{2}) = (3*s)* \frac{h}{2}$$
  Somma dei segmenti * $\frac{h}{2}$

L’Area del cerchio

- Ovviamente approssimare la superficie del cerchio con la somma dei tre triangolini, NON è una buona approssimazione!



- Ma possiamo migliorala!
  Possiamo ad esempio inscrivere nel cerchio un quadrato
- I 4 triangoli in cui suddividiamo il quadrato hanno un’area complessiva più simile a quella del cerchio

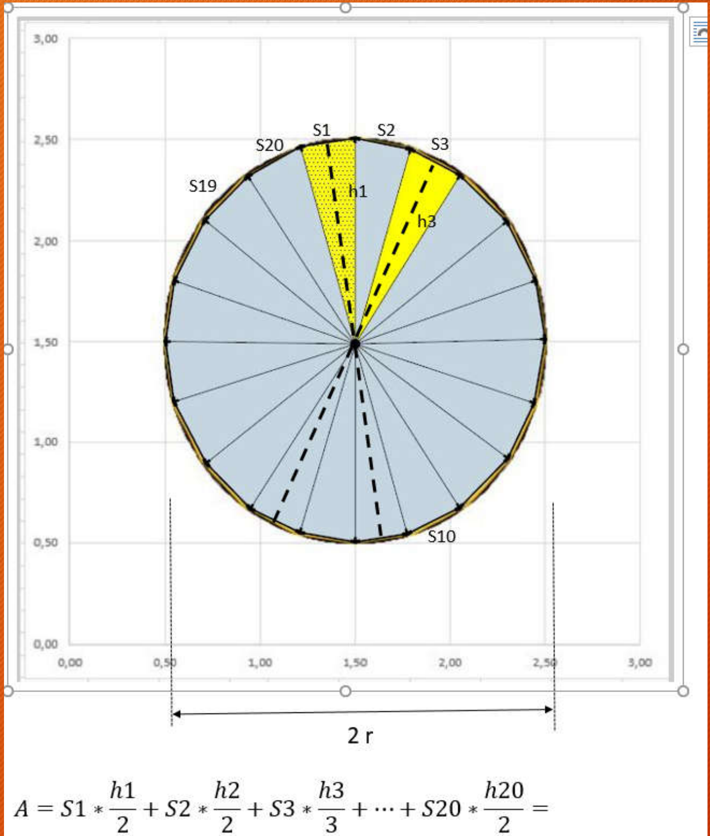
  L’area dei 4 triangoli, uguali è:
  A =4*(s* $\frac{h}{2}$)= Somma dei segmenti $\frac{h}{2}$

L’Area del cerchio

- Possiamo migliorare ancora, e di molto!
- Inscrivendo nel cerchio un poligono regolare di 20 lati uguali (Icosagono).

Ecco il risultato.

L’Area del cerchio

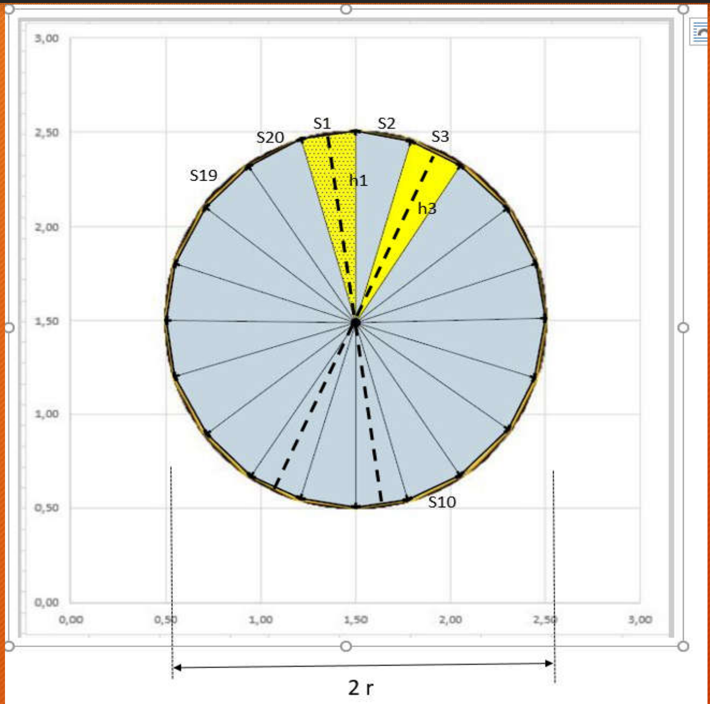


L’area del 20 triangoli, uguali è:

$A = 20$*(s* $\frac{h}{2}$)=(20*s)* $\frac{h}{2}$ =

Somma dei 20 segmenti * $\frac{h}{2}$

L’Area del cerchio

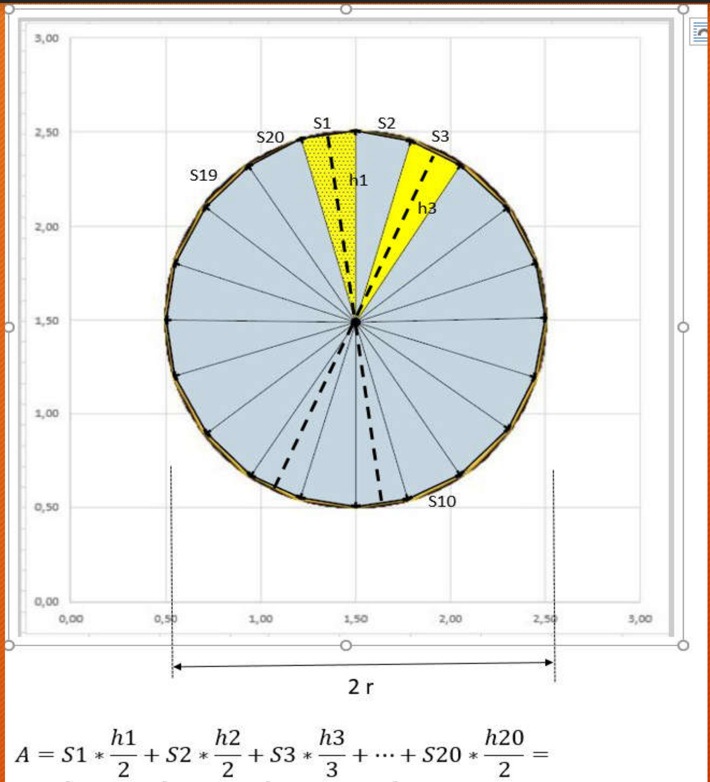


$$A = S1 * \frac{h1}{2} + S2 * \frac{h2}{2} + S3 * \frac{h3}{3} + \cdots + S20 * \frac{h20}{2} =$$

Abbiamo quindi capito che se aumentiamo il numero delle suddivisioni l’area della somma dei triangolini diventerà uguale all’area del cerchio.

Dovremo però riuscire a sommare infiniti termini! Come faremo?

L’Area del cerchio

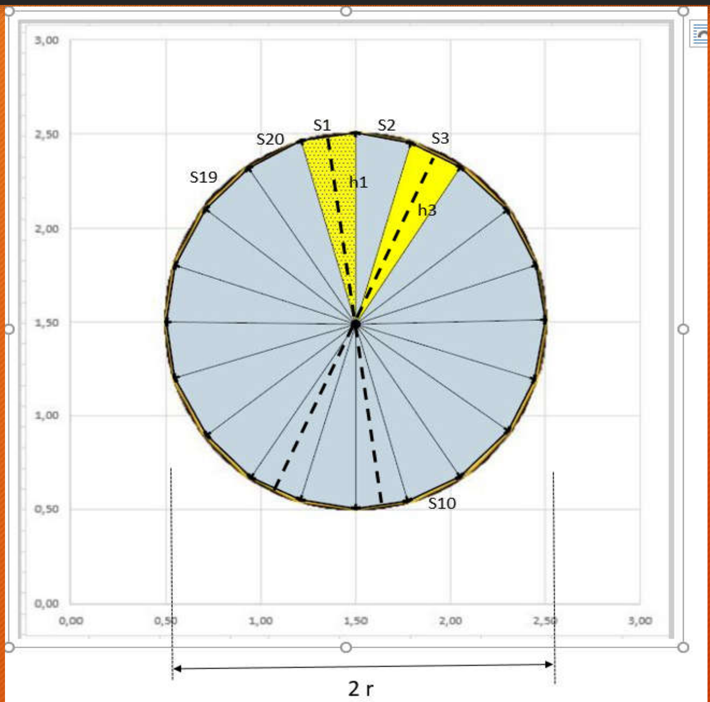


Osserviamo cosa accade alle basi, S1, S2 … , di ogni triangolino, durante questa suddivisione infinita

Le loro dimensioni diverranno di lunghezza infinitesima, ma saranno tutti contenuti nella circonferenza e quindi la loro somma (costrituita da infiniti termini), sarà uguale alla lunghezza della Circonferenza! Non otterremo una lunghezza infinita, bensì:

Somma degli infiniti segmenti, ciascuno infinitesimo, è uguale a $2\pi R$

L’Area del cerchio



$A = S1 * \frac{h1}{2} + S2 * \frac{h2}{2} + S3 * \frac{h3}{3} + \cdots + S20 * \frac{h20}{2} =$

L’area del poligono di infiniti lati diverrà

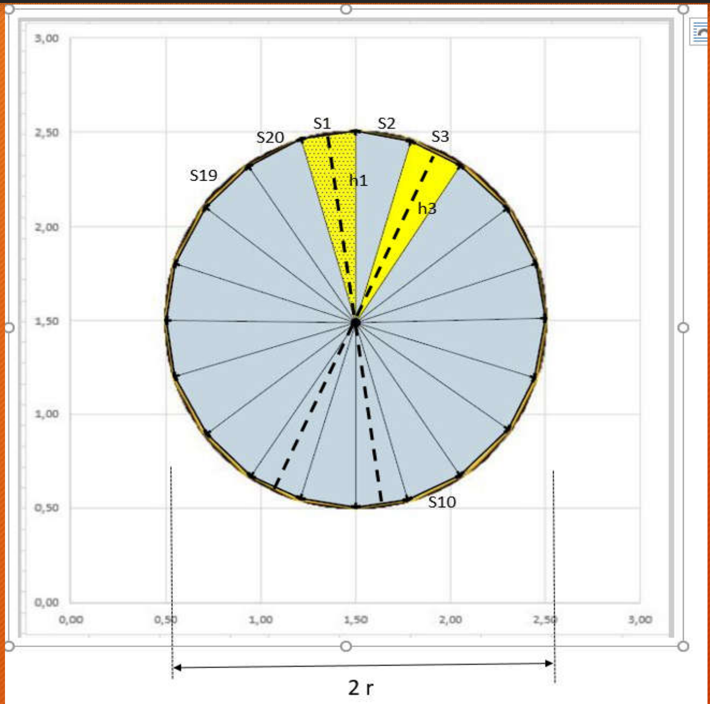
$A =$ Somma degliinfiniti segmenti * $\frac{h}{2}$ = 2πR $\frac{h}{2}$

Ma aumentando il numero di segmenti si nota che l’altezza di ciascun triangolino cresce fino a confondersi con R, il raggio della Circonferenza. E cosi finalmente otterremo:

$A = 2\pi R \frac{h}{2} = 2\pi R \frac{R}{2} = \pi R^2$

L’area del CERCHIO!!!

L’Area del cerchio



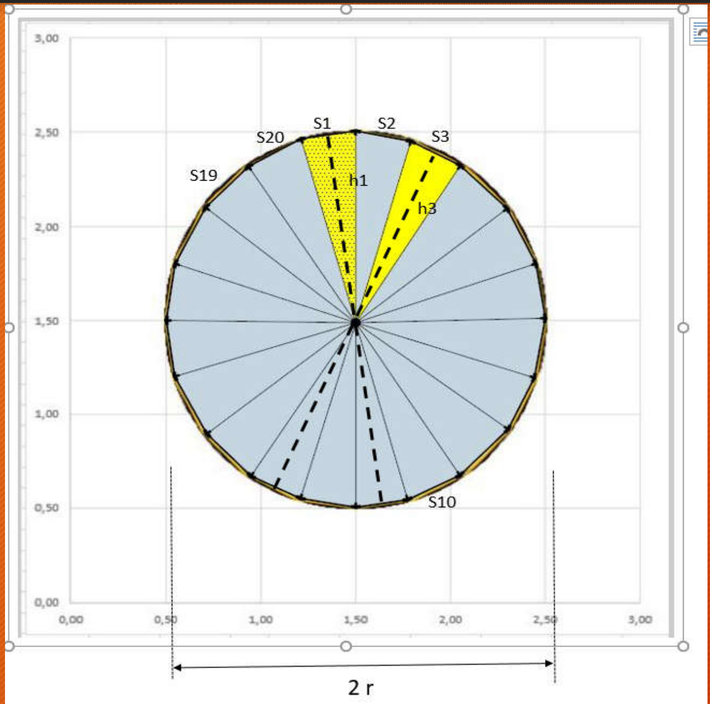
$$A = S1 * \frac{h1}{2} + S2 * \frac{h2}{2} + S3 * \frac{h3}{3} + \cdots + S20 * \frac{h20}{2} =$$

ABBIAMO ESEGUITO UNA SOMMA INFINITA!

QUESTO E’ IL NOSTRO VERO SUCCESSO! UN RISULTATO NOTEVOLE. MAI OTTENUTO DALL’UOMO FINO AL 1600 CON NEWTON e LEIBNIZ (escludendo Archimede!)

E NON ABBIAMO DOVUTO FARE INFINITE SOMME, CHE AVREBBERO RICHIESTO UNO SFORZO IMPOSSIBILE RICHIEDENDO UN TEMPO INFINITO!

L’Area del cerchio



$$A = S1 * \frac{h1}{2} + S2 * \frac{h2}{2} + S3 * \frac{h3}{3} + \cdots + S20 * \frac{h20}{2} =$$

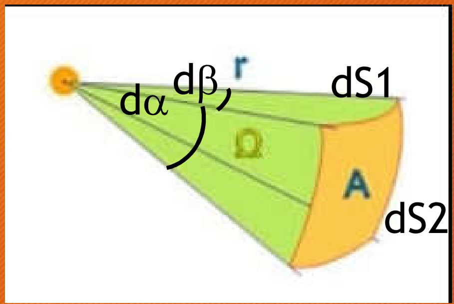
Facciamo un esempio. Qual è l’area di una circonferenza di raggio 60 cm. Applichiamo la formula:

$A = \pi R^2$ = 3,14* (60 cm)^2 = 3,14* 60*60 cm^2 = 3,14*3600 cm^2 = 11.304 cm^2

E quanto è lunga la circonferenza?

C= $2\pi R$ = 2*3,14* 60 cm =6,28 *60 cm= 375,6 cm

La superficie di una sfera



Dividiamo la superficie della Sfera in tanti quadratini sempre più piccoli, infinitesimi.
Il lato di ogni quadratino di trova su una Circonferenza di raggio r

La sua lunghezza è: $dS = r * d\theta$

(*) L'area del quadratino sarà dA= $dS1*dS2 = r^2 * d\alpha * d\beta = r^2 * d\Omega$
(Per correttezza il raggio di dS1 non è *r* ma varia da 0 a R in funzione della distanza verticale del quadratino dalla sommità della sfera).

$d\Omega$ è l'infinitesimo dell'angolo solido della Sfera

La superficie della Sfera è la somma degli infiniti infinitesimi dA:

$$Ssfera = dA1 + dA2 + \cdots + dAn + \cdots = r^2 * d\Omega + r^2 * d\Omega + \cdots + r^2 * d\Omega + \cdots = r^2 * (d\Omega + d\Omega + \cdots d\Omega + \cdots) = 4\pi r^2$$

Fine della III lezione

GRAZIE!