

INDICE 4

Riassunto delle precedenti 3 lezioni

Il Triangolo

- La similitudine dei triangoli
- L'altezza della Piramide di Cheope
- Il Teorema di Pitagora e la sua importanza nella storia

La Geometria Euclidea: gli elementi

- Postulati, Assiomi e Teoremi
- Il V Postulato
- Esempi di dimostrazione
 - Teorema delle rette distinte
 - I Criterio di uguaglianza dei triangoli

Riassunto delle prime 3 lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- l'unità di misura
- Lo strumento di misura (il metro rigido, il quadrato, il cubo)
- La dimensione
- Metodi per misurare: uso del triangolo

Difficoltà

- Gli oggetti da misurare sono curvi (Lez. I, II, III)
- Gli strumenti di misura sono più lunghi o più corti dell'oggetto da misurare (Lez. I, II)
- Modifica dello strumento di misura: infinitesimi e infinito (Lez. II, III)
- Non basta misurare le lunghezze bisogna conoscere anche gli angoli. (Lez. I)

Riassunto delle prime 3 lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- L'Approssimazione
- Il Valor Medio, la Varianza e la Gaussiana
- Concetto di dimensione non intera: i frattali
- Metodo di esaustione
- Valutazione di π

Difficoltà

- Somme infinite (Lez. II, III)

Riassunto delle prime 3 lezioni

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

- Concetto di Infinito e Infinitesimi:
- La somma di infiniti infinitesimi può essere finita;
- Una lunghezza finita può contenere infiniti punti.

Difficoltà

- L'intuito e la logica possono condurre a risultati errati non confermati dall'esperienza.

Il Triangolo e La Geometria Euclidea

Avendo scelto un approccio dal basso verso l'alto, prima osservare , provare e poi cercare una teoria generale, inizierò a parlare della figura del triangolo che fu ben studiata nel VI a.c da due grandi pensatori Talete e Pitagora

Il Triangolo

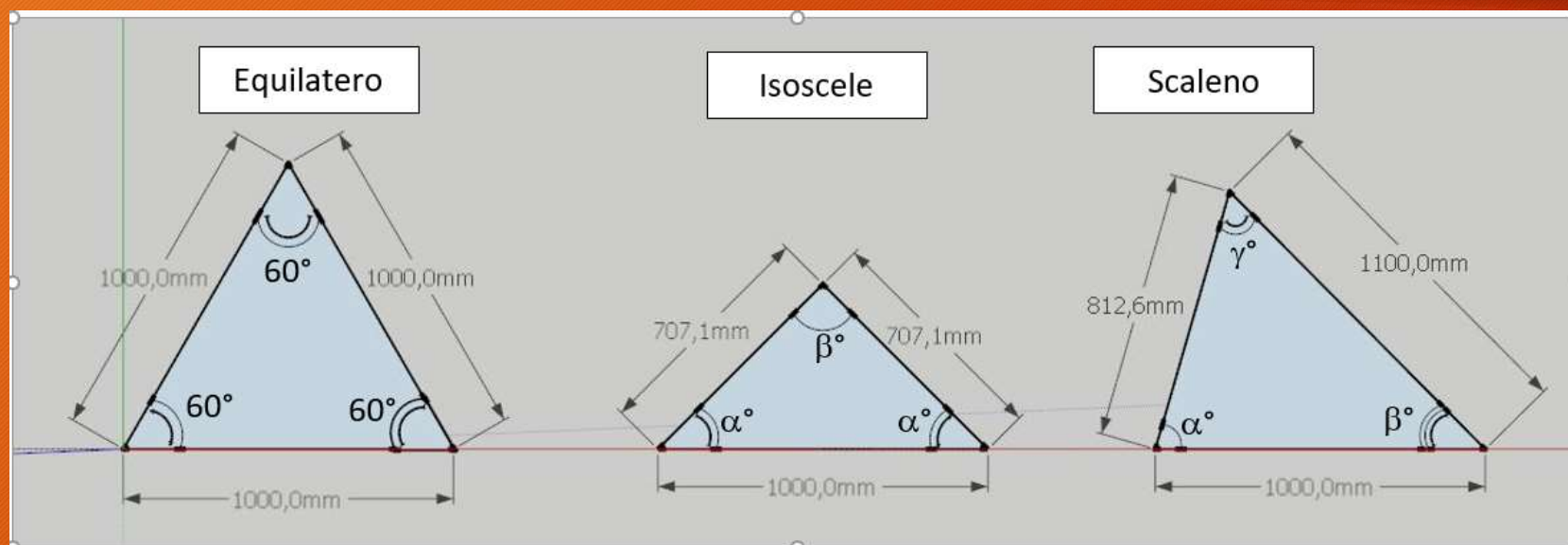
Abbiamo visto come il triangolo sia così importante per analizzare gli oggetti geometrici.

Lo abbiamo già utilizzato per misurare una stanza evitando così la difficoltà di misurare anche gli angoli.

La Geometria Euclidea

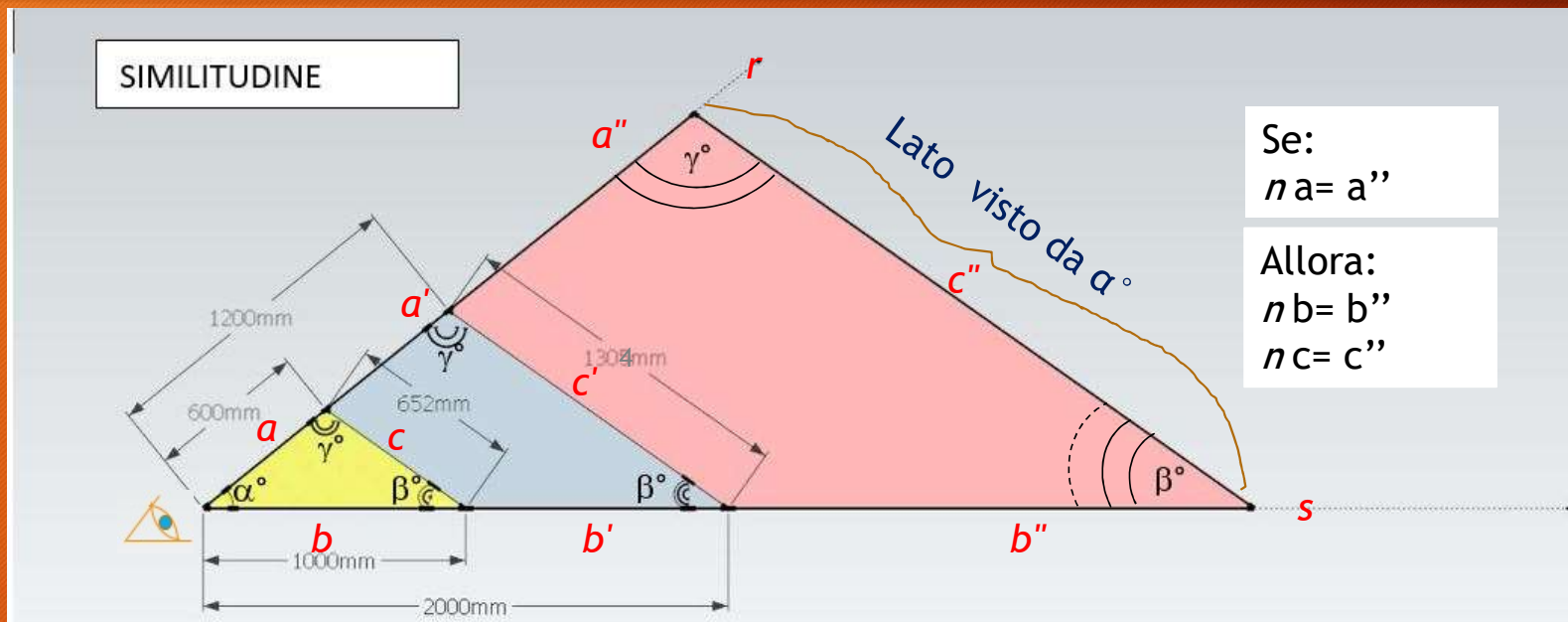
Elementi, è l'opera fondamentale di Euclide, divisa in 13 libri. Di questi, sei concernono la geometria elementare, tre la teoria dei numeri, uno (il libro X) gli incommensurabili e gli ultimi tre la geometria solida

Il Triangolo



Proprietà del triangolo: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Il Triangolo: Similitudine



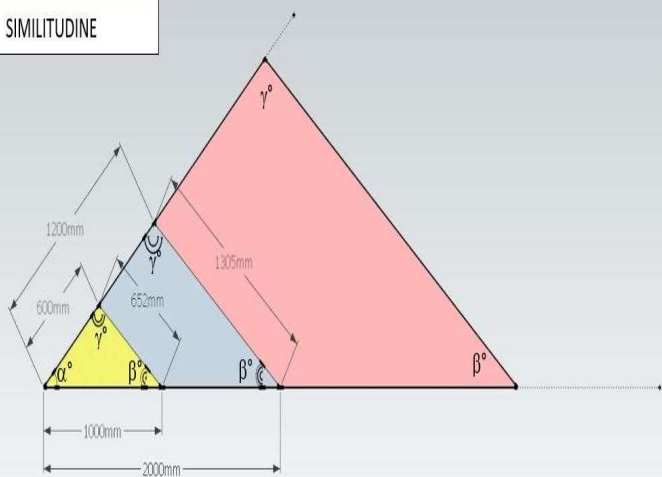
Due triangoli simili hanno angoli corrispondenti uguali.

Proprietà: Due triangoli simili hanno i lati corrispondenti in proporzione

Nota: i lati corrispondenti hanno di fronte lo stesso angolo

Il Triangoli Simili

SIMILITUDINE



I triangoli simili sono:

Triangolo Giallo <simile> Triangolo (Giallo + Grigio) <simile>

Triangolo (Giallo + Grigio+ Rosa)

Nei triangoli simili se si raddoppia un lato si raddoppiano anche gli altri due lati.

Esempio:

Se il lato del triangolo Giallo, uguale a 1000mm, viene raddoppiato e diventa 2000mm (Triangolo Giallo + Grigio) anche gli altri lati corrispondenti si raddoppiano

500mm -> 1000 mm e 652mm -> 1304mm

SIMILITUDINE e Geometria Euclidea

- La Similitudine è una proprietà della Geometria Euclidea

Nelle altre geometrie, ad esempio quella costruita su una sfera la similitudine non esiste!

Se si ingrandisce un triangolo gli angoli non restano uguali e i lati non crescono in proporzione.

- La Similitudine è importante perché consente di rappresentare gli oggetti in scala.
- La forma resta la stessa se è ingrandita o ridotta.

L'altezza della Piramide di Cheope

Piramide di Cheope Grande Piramide



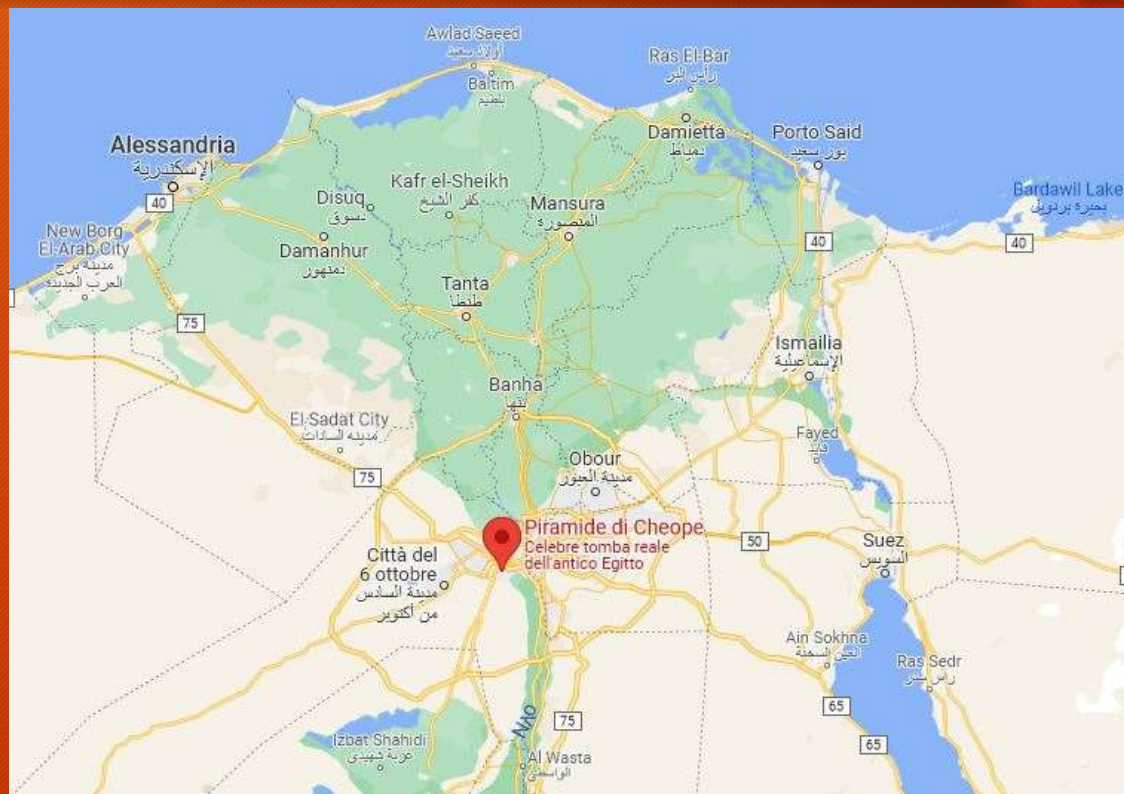
Vista della Piramide di Cheope

Stile architettura dell'antico
Egitto

Epoca 2550 a.C. circa

Dimensioni

Superficie	53 077 m ²
Altezza	138,8 m ^{[1][2]}
Larghezza	230,36 m ^[2]



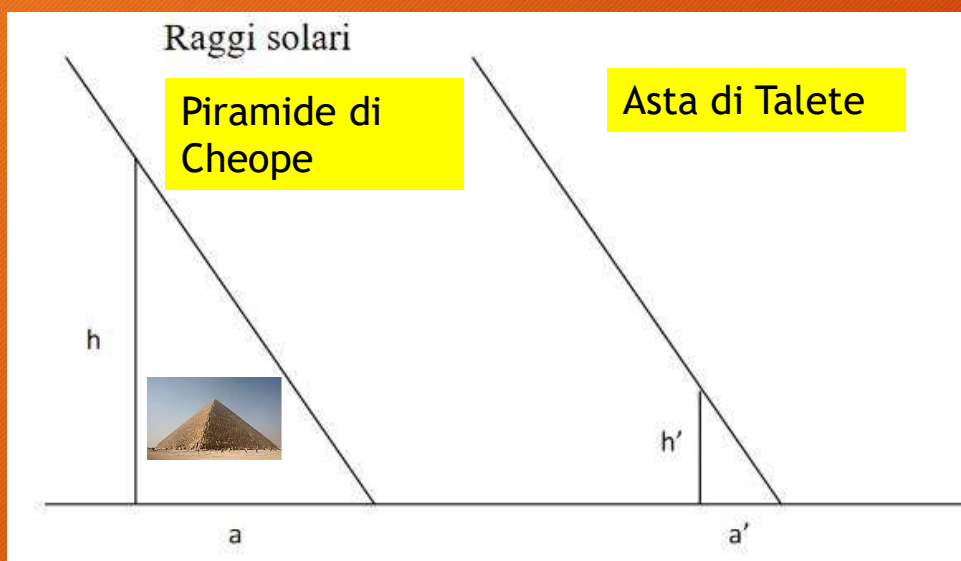
L'altezza della Piramide di Cheope

L'ANEDDOTO DI TALETE (600 a.c.) E LA MISURA DELL'ALTEZZA DELLA PIRAMIDE

Si racconta (Plutarco e Plinio il vecchio) che il faraone Amasis, abbia sfidato Talete a misurare l'altezza della piramide di Cheope.

Superata la prova, il faraone gli esprime la sua ammirazione, per il modo geniale in cui la misura fu effettuata.

L'altezza della Piramide di Cheope



La piramide di Cheope ha altezza h .

Non è misurabile direttamente perché essendo al centro della costruzione non era accessibile

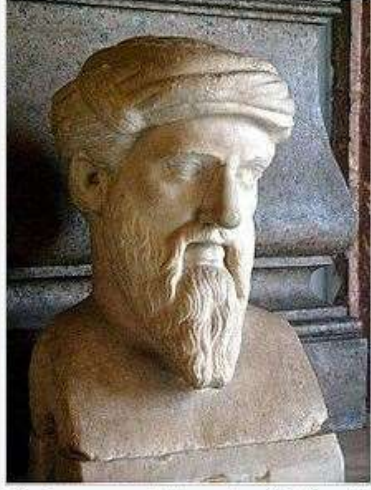
Usando i raggi del sole che proiettano l'ombra degli oggetti sul terreno è possibile dire che i rapporti tra i lati dei due triangoli simili (angoli uguali) sono uguali:

$$\frac{h}{a} = \frac{h'}{a'}$$

Misurando facilmente h' , a' ed a si ricava

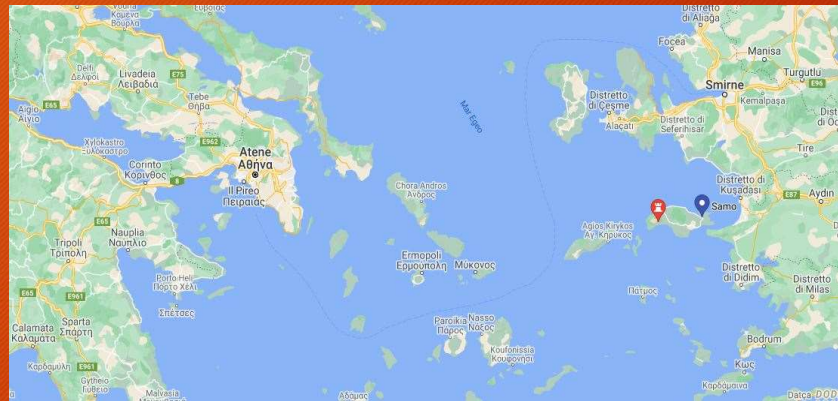
$$h = \frac{a}{a'} * h'$$

Pitagora

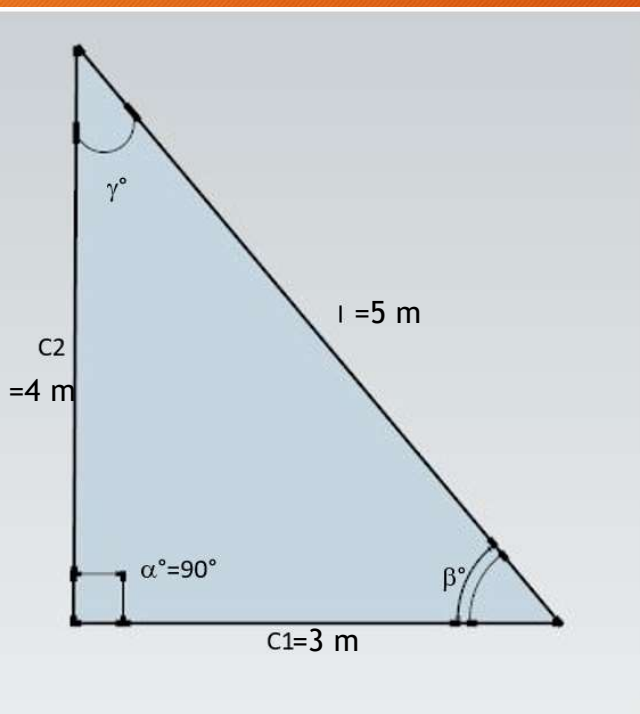


Copia romana del I secolo a.C. di
originale greco conservata nei Musei
Capitolini di Roma

Pitagora (in greco antico: Πυθαγόρας, *Pythagóras*; Samo, tra il 580 a.C. e il 570 a.C. - Metaponto, 495 a.C. circa) è stato un filosofo greco. Fu matematico, taumaturgo, astronomo, scienziato, politico e fondatore a Crotone di una delle più importanti scuole di pensiero dell'umanità, che prese da lui stesso il nome: la Scuola pitagorica.



Il Triangolo Rettangolo



Il triangolo rettangolo ha un angolo di 90°
I due lati perpendicolari tra loro sono chiamati *Cateti* mentre
il lato obliquo è l'*Ipotenusa*

E' un triangolo notevole perché per esso vale il famoso
teorema di Pitagora:

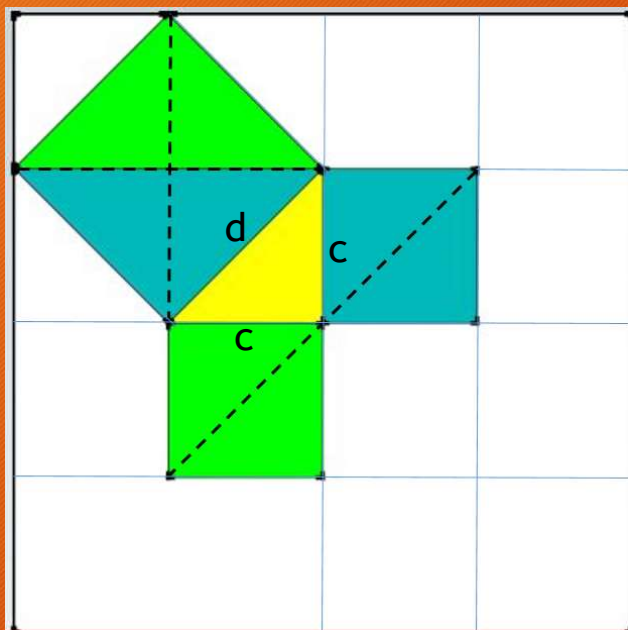
$$c1^2 + c2^2 = l^2$$

Per esempio se i cateti $c1=3m$ e $c2=4m$ l'ipotenusa è $l=5m$

Infatti: $(3m)^2 + (4m)^2 = (9+16) m^2 = 25 m^2$

da cui $l^2 = 25 m^2$ e quindi $l = 5 m$

Il Triangolo Rettangolo



Teorema di Pitagora. Dimostrazione in un caso particolare

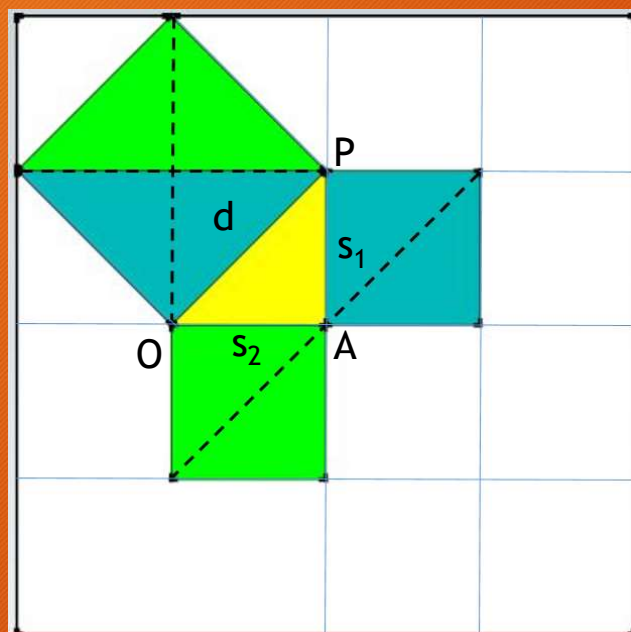
L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti

Il teorema si può generalizzare per tutti i triangoli rettangoli

$$c^2 + c^2 = d^2$$

La somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa

Il Triangolo Rettangolo



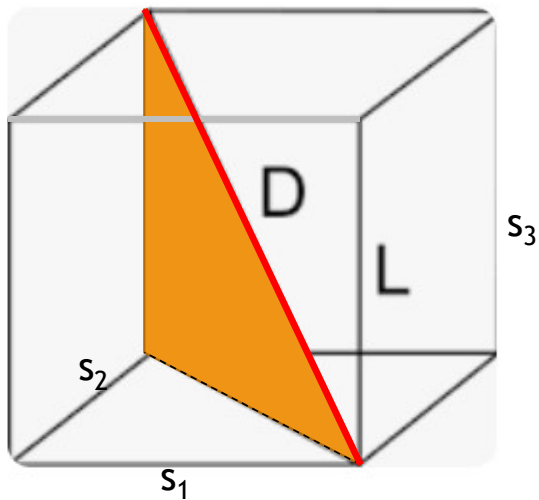
Teorema di Pitagora. Calcolo della Distanza

$$\overline{OP} = d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2}$$

La distanza tra due punti si calcola misurando le distanze degli spostamenti ortogonali

E nello spazio: $d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$

Il Triangolo Rettangolo



La diagonale del cubo è : $d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$

$$D = \sqrt{L^2 + L^2 + L^2} = \sqrt{3L^2} = L\sqrt{3} = 1,73L$$

Si scoprono i numeri incommensurabili!

Se $s_1^2 = 1$ e $s_2^2 = 1$

$$d = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Questa uguaglianza sembra non aver nessun senso!

Infatti ne discende che:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

E' chiaro che nessun numero intero può aver per quadrato 2.

Se $d = \frac{p}{q}$ con p e q primi tra loro, allora $d^2 = \frac{p^2}{q^2}$ in cui anche p^2 e d^2 sono primi tra loro e quindi il loro rapporto non può essere un numero intero, $d^2 \neq 2$, da cui $d \neq \sqrt{2}$!!!

Si scoprono i numeri incommensurabili!

Se $d = \sqrt{2}$ è un numero incommensurabile allora anche la diagonale di un quadrato di lato uno è incommensurabile con il lato del quadrato, cioè:

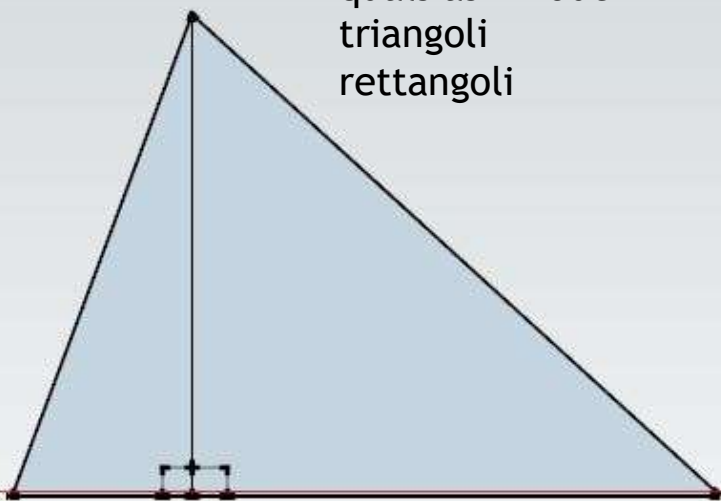
$\frac{\text{diagonale}}{\text{lato del quadrato}} = \sqrt{2}$ non ha senso nel mondo greco!

Se esistono distanze non commensurabili...

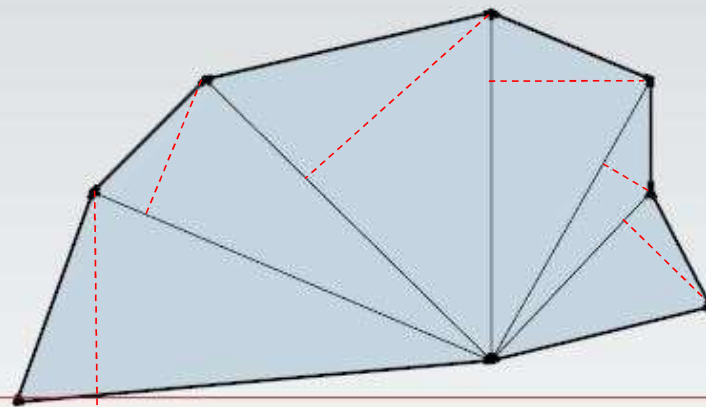
Allora il mondo non è misurabile in modo esatto!

Scomposizione in triangoli di un poligono

Scomposizione di
un triangolo
qualsiasi in due
triangoli
rettangoli



Scomposizione di una figura poligonale
qualsiasi in triangoli



Il triangolo nelle costruzioni

Il Triangolo è una forma
indeformabile

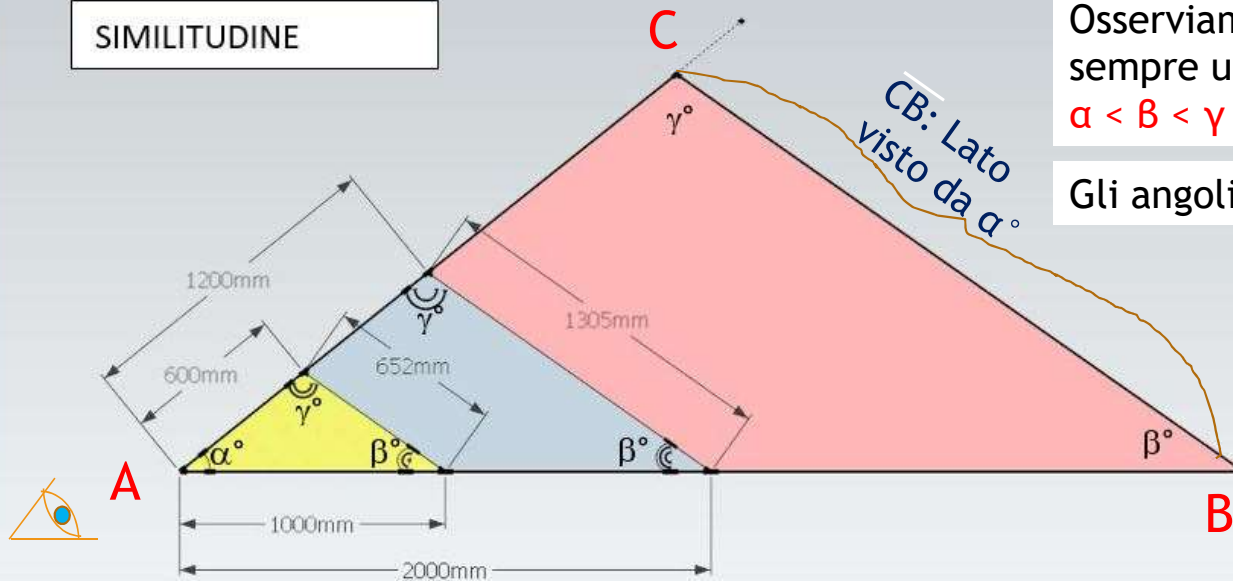


Il triangolo nelle costruzioni | La casa della tecnologia



Teorema di Pitagora e Similitudine dei triangoli

SIMILITUDINE



Osserviamo che ad angolo maggiore corrisponde sempre un lato di misura maggiore

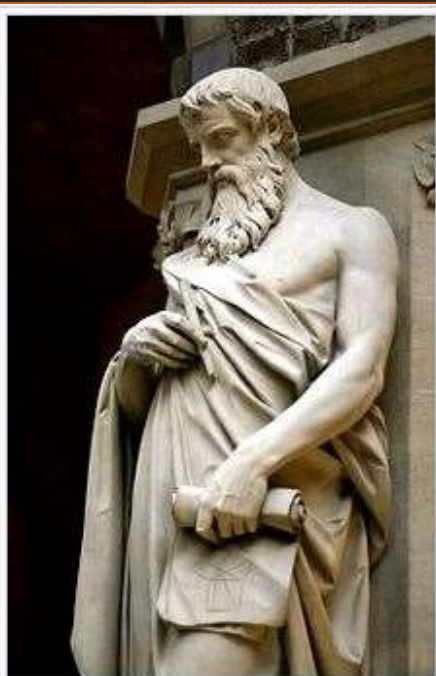
$$\alpha < \beta < \gamma \rightarrow CB < CA < AB$$

Gli angoli e i lati di un triangolo non sono indipendenti

Usando il Teorema di Pitagora e la Similitudine possiamo costruire delle relazioni generali tra angoli e lati di un triangolo: la **TRIGONOMETRIA**

Ipparco da Nicea (200 a.c.) è stato il primo a costruire una tavola trigonometrica con cui risolvere ogni triangolo

Euclide



Statua di Euclide posta nel museo di storia naturale dell'università di Oxford.

Euclide (in greco antico: Εὐκλείδης, *Eukléidēs*; IV secolo a.C. - III secolo a.C.) è stato un matematico e filosofo greco antico. Si occupò di vari ambiti, dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, oltre, ovviamente, alla matematica. Euclide è menzionato da Proclo, che lo colloca tra i più giovani discepoli di Platone.

Dati sintetici
Matematico e scienziato greco
DATA DI NASCITA
Anno di nascita: 323 A.C.
DATA DI MORTE
Anno di morte: 283 A.C. - 40 anni



I 5 Postulati di Euclide

Gli «*Elementi*» sono il suo lavoro più noto, è una delle più influenti opere di tutta la **storia della matematica**

I Postulato: Per due punti distinti del piano passa una e una sola retta.

II Postulato: Una linea retta può essere prolungata indefinitamente

III Postulato: Dato un punto e una lunghezza si può descrivere una circonferenza

IV Postulato: Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro.

Questi primi 4 postulati costituiscono la **Geometria Assoluta**.

Si possono verificare con riga e compasso.

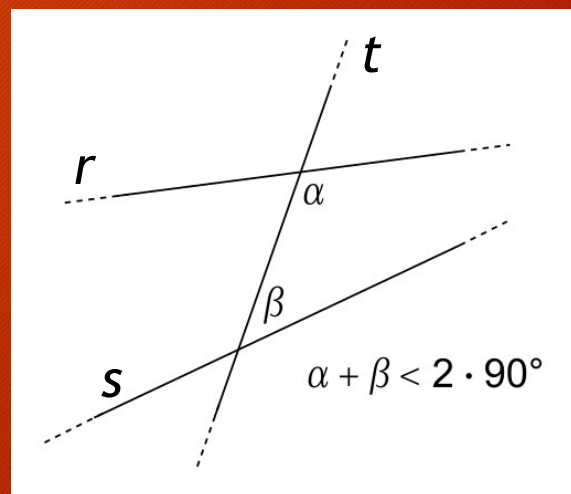


I 5 Postulati di Euclide

Aggiungendo il *V Postulato* alla *Geometria Assoluta* si definisce la *Geometria Euclidea*

V Postulato: se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

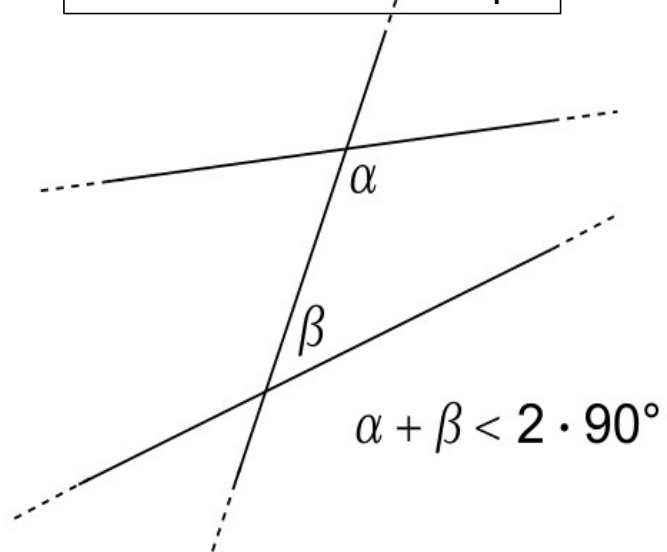
PO. Postulato dell'obliqua



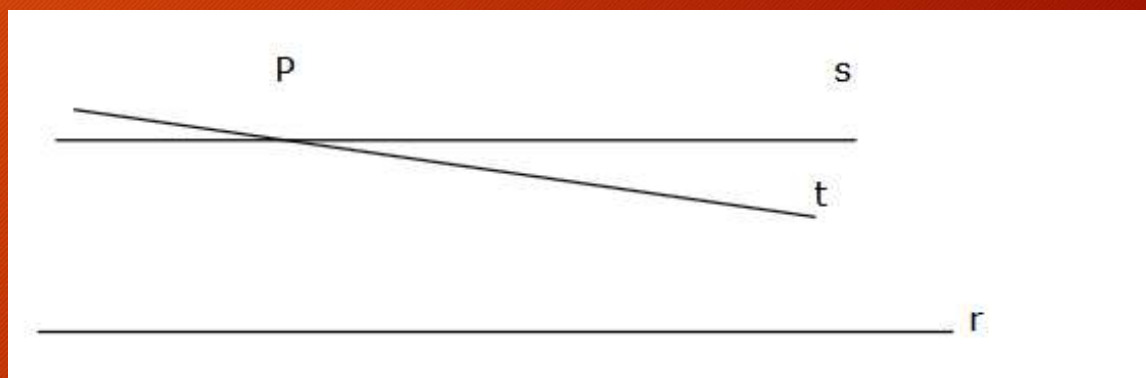
V Postulato

Alcune formulazioni equivalenti al V postulato

PO. Postulato dell'obliqua



Postulato dell'unicità (PU): per un punto P esterno ad una retta passa una sola retta parallela alla retta data «r».



Geometria assiomatica

La geometria Euclidea consiste nell'assunzione di cinque semplici e intuitivi concetti, detti assiomi o postulati e, nella derivazione da detti assiomi, di altre proposizioni (teoremi) che non abbiano alcuna contraddizione con essi.

I Postulati o Assiomi

Sono delle **Proposizioni** che si accolgono come **Vere** senza alcuna **Dimostrazione**, perché ritenute evidenti

Teorema

Ogni teorema è costituito da tre parti principali: le ipotesi (i dati di partenza, che non si possono contraddire), la tesi (ciò che si deve dimostrare) e la dimostrazione (l'insieme di tutti i ragionamenti utilizzati per confermare, o smentire, la tesi)

Concetto di verità in geometria

Le proposizioni in geometria sono VERE solo nei due seguenti casi:

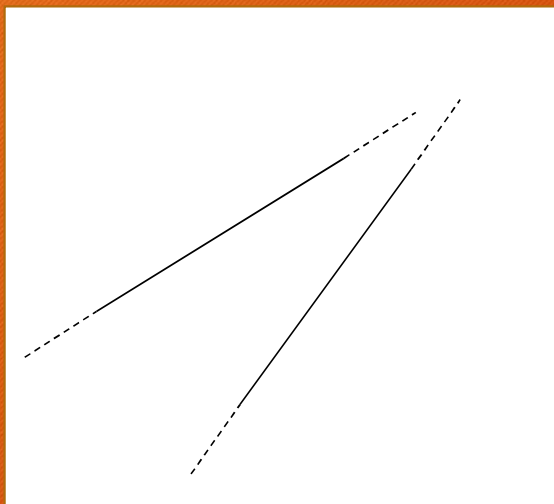
- 1) sono **Postulati** o **Assiomi**.
- 2) sono **Teoremi**

Dopo la scoperta delle geometrie non euclidee la verità geometrica e la realtà non sempre coincidono.

Teoremi e **Postulati** possono scambiarsi tra loro.

Dimostrazioni nella geometria Euclidea

Teorema1: Due rette distinte, giacenti in un piano, si incontrano al più in un punto



Ipotesi: le due rette sono distinte

Tesi: le due rette si incontrano al più in un punto

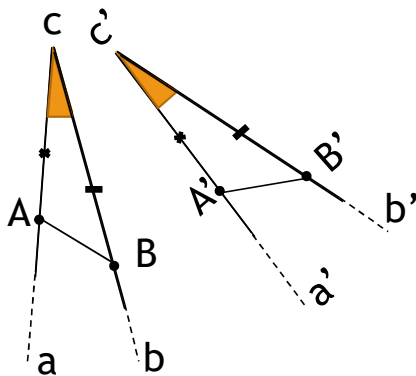
Dimostrazione: Le due rette, essendo distinte, non possono avere due (o più) punti in comune perché, in tal caso, coinciderebbero in base all'assioma 1. Quindi due rette distinte possono avere al massimo un punto in comune.

Corollario (conseguenza diretta di un teorema):

Dal teorema segue che date due rette distinte nel piano ci sono solo due possibilità:

- 1) le rette sono **parallele** e non hanno alcun punto in comune.
- 2) le rette sono **incidenti** e hanno un solo punto in comune

I criterio di uguaglianza dei triangoli



Teorema: Primo Criterio di uguaglianza dei triangoli
(Proposizione 4 di Euclide)

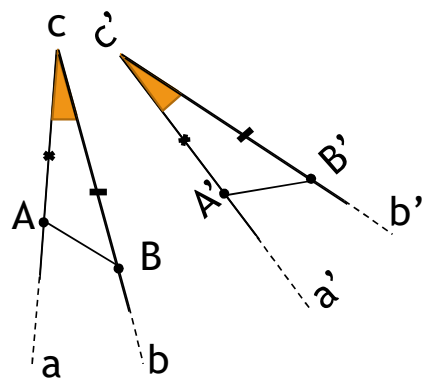
Se due triangoli hanno due lati e l'angolo fra essi compreso uguali,
sono tra loro uguali

Ipotesi: $CA = CA'$; $CB = CB'$

Tesi: Uguaglianza dei triangoli, cioè $ABC = A'B'C'$

Dimostrazione: I criterio di uguaglianza dei triangoli

Teorema: Primo Criterio di uguaglianza dei triangoli



Ipotesi: Consideriamo due angoli uguali $\hat{a}b = \hat{a'b'}$ e indichiamo con C e C' i loro vertici

Costruzione Prendiamo sulle semirette a e a' due punti A e A' in modo che $CA = CA'$

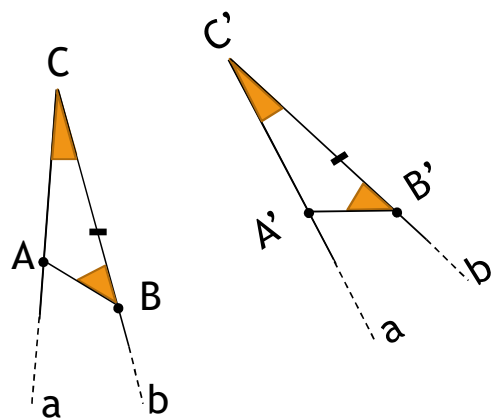
Costruzione Prendiamo sulle semirette b e b' due punti B e B' in modo che $CB = CB'$

Congiungendo A con B e A' con B' si ottengono i triangoli ABC e $A'B'C'$

Dimostrazione: I due Triangoli sono uguali.

Poiché i due angoli uguali $\hat{a}b$ e $\hat{a'b'}$ sono uguali, essi sono sovrapponibili in modo che coincidano. Immaginiamo di far coincidere così i punti C con C' , A con A' e B con B' i due triangoli vengono a coincidere e quindi sono uguali.

Il criterio di uguaglianza dei triangoli



Teorema: Secondo Criterio di uguaglianza dei triangoli
(Proposizione 26 di Euclide)

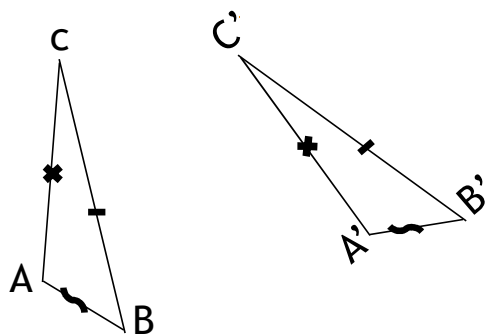
Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due angoli e il lato tra essi compreso, allora sono congruenti.

Ipotesi: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$; $CB = C'B'$

Tesi: I triangoli sono uguali, cioè $ABC = A'B'C'$

NON DIMOSTRATO.

III criterio di uguaglianza dei triangoli



Teorema: Terzo Criterio di uguaglianza dei triangoli
(*Proposizioni 7 e 8 di Euclide*)

Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti tutti e tre i lati, allora sono congruenti.

Ipotesi: $AB=A'B'$; $AC=A'C'$; $BC=B'C'$

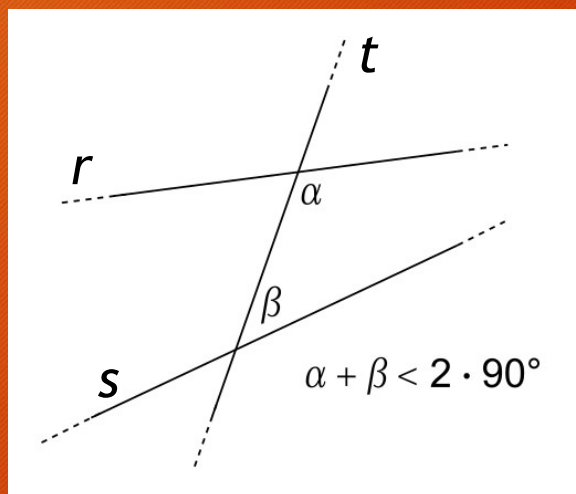
Tesi: I triangoli sono uguali, cioè $ABC=A'B'C'$

NON DIMOSTRATO.

V Postulato e Teorema di Pitagora

V Postulato
PO. Postulato dell'obliqua

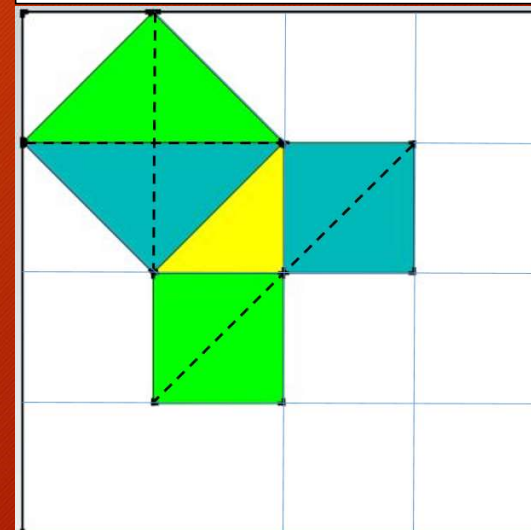
Utilizzato dalla
Proposizione 29 in
poi



Dimostrazione



Teorema di Pitagora
(Proposizione 47 di Euclide)

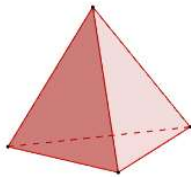


Geometria Assoluta P.29

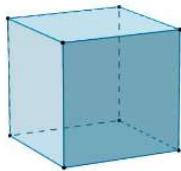
Geometria Euclidea

I Solidi Platonici: Sono solo 5!

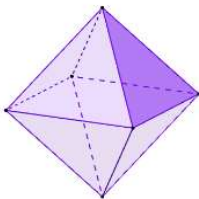
Teorema: Esistono solo **cinque** poliedri regolari. Essi sono: il *tetraedro regolare*,



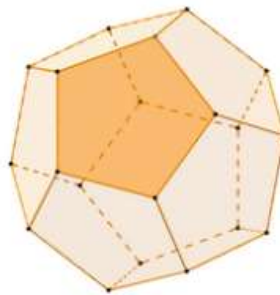
il *cubo* (o *esaedro regolare*),



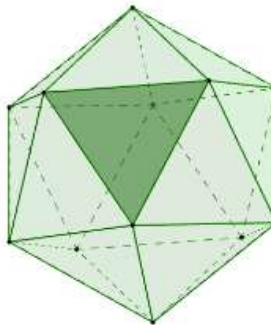
l'*ottaedro regolare*,



il *dodecaedro regolare*,



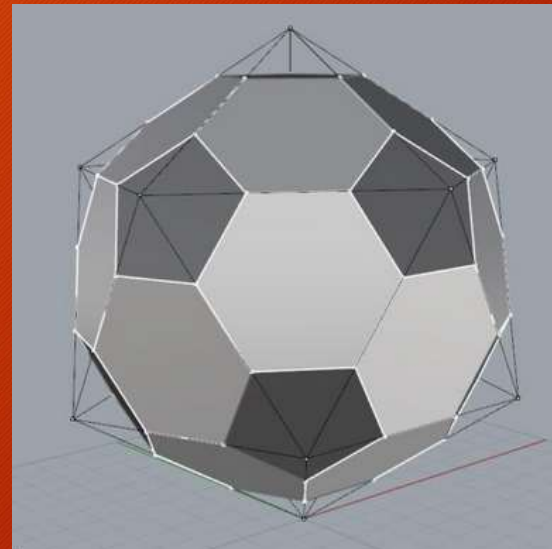
l'*icosaedro regolare*.



E il Pallone?



Il Pallone non è formato da poligoni tutti uguali:
E' formato da 20 esagoni e 12 pentagoni



Riassunto

Riassumiamo

Il V Postulato di Euclide

Euclide è sempre stato molto dubbioso rispetto al quinto postulato, perché era convinto che fosse possibile derivarlo dagli altri quattro e, in definitiva, rimuoverlo dagli assiomi di base

La questione dell'indipendenza del quinto postulato dagli altri quattro tenne impegnate le più grandi menti matematiche per oltre **2000 anni**.

Padre Giovanni Girolamo Saccheri, un gesuita ligure, pubblicò nel **1733** poco prima di morire, una dimostrazione in cui si tentò di dimostrare per assurdo il quinto postulato supponendolo falso per poi ottenere una contraddizione. Fu un estremo tentativo per **<liberare Euclide da ogni macchia>**

Saccheri aprì le porte alle geometrie non euclidee.

Solamente nel 1828 Gauss segnò una svolta nell'indagine delle geometrie non euclidee le quali verranno infine formalizzate da **Riemann, Beltrami, Poincaré e Hilbert**, all'inizio del **1900**

Il V Postulato di Euclide

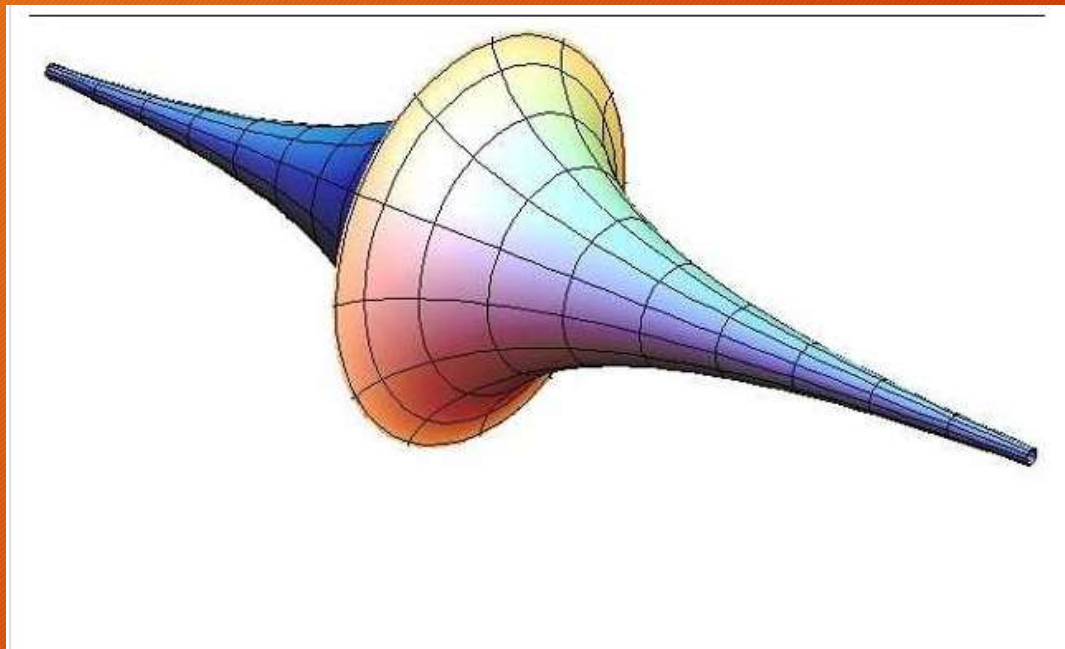
Il V postulato può essere sostituito dal teorema di Pitagora, o dal Teorema che dimostra che la somma degli angoli di un triangolo è sempre 180° .

Dopo questa sostituzione è possibile dimostrare il V postulato.

Perché è importante il V Postulato?

- 1) Senza il V postulato Euclide riesce a dimostrare solo le prime 28 Proposizioni (Teoremi)
- 2) Senza il V postulato non è valido il teorema di Pitagora
- 3) Senza il V postulato Euclide non è vero che la somma degli angoli interni di un triangolo sia 180°
- 4) La Geometria Assoluta non contiene il V Postulato
- 5) Aggiungendo il V postulato alla **Geometria Assoluta** si ottiene la **Geometria è Euclidea**
- 6) **Negando il V postulato e mantenendo valida la Geometria Assoluta si definisce la Geometria Iperbolica**

Geometria Iperbolica.



La Pseudosfera di Eugenio Beltrami
(Cremona 1835, Roma 1900)

E' il primo modello di geometria
iperbolica individuato dal geometra
italiano nel 1868

Domande?

Per la prossima lezione se avete già delle domande inviatemele così cercherò di prepararmi per rispondervi.

Fine della IV lezione

GRAZIE!