

INDICE V

Richiamo alla lezione precedente

- Cenni sulla geometria non euclidea
- Il V Postulato di Euclide
- La Terra piatta
- Lo Spazio -Tempo: Albert Einstein
- Il GPS
- Le Stringhe

Richiamo alla lezione precedente

Lo Spazio intorno a noi

Concetti importanti

Concetto di verità in geometria

Le proposizioni in geometria sono VERE solo nei due seguenti casi:

- 1) sono **Postulati** o **Assiomi**.
- 2) sono **Teoremi**

Dopo la scoperta delle geometrie non euclidee la verità geometrica e la realtà non sempre coincidono.

Difficoltà

- L'intuito e la logica possono condurre a risultati errati non confermati dall'esperienza.

Geometrie Non Euclidee.

V Postulato di Euclide: per un punto esterno ad una retta passa una sola retta parallela ad una retta data (Fig.A).

E se invece di una retta parallela per P ne passassero almeno due (Fig.B)? Oppure nessuna?

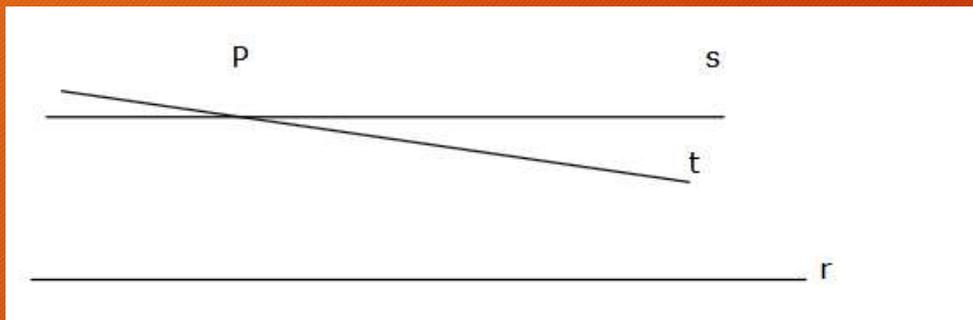


Fig.A

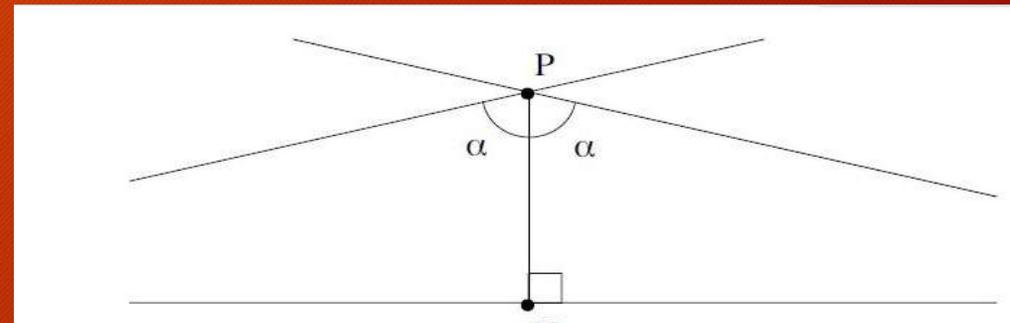


Fig.B

Geometrie Non Euclide e l'Etica

Il Libero Arbitrio e accettazione o rifiuto del V Postulato di Euclide

Aristotele, *Etica Eudemia*

Per definire l'uomo, come unico essere libero di scegliere tra il **bene** e i **male**, l'unico esempio riportato da Aristotele è ripreso dalla Geometria, **accettando o rifiutando il V Postulato**

Possiamo scegliere liberamente la Geometria Euclidea o Non Euclidea!

Geometria Euclidea e l'Intuito

Lo spazio è “rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne”.

Immanuel Kant. *Critica della ragion pura* (1781)

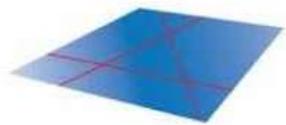
ragion per cui, pur essendo possibile elaborare diversi modelli logicamente possibili,

l'unica conoscenza scientifica è quella che riguarda l'unica possibile intuizione dello spazio, studiata tramite la geometria euclidea.

Torniamo nella Geometria Euclidea!

Geometrie Non Euclidee.

Geometria euclidea e non euclidea



Euclidean



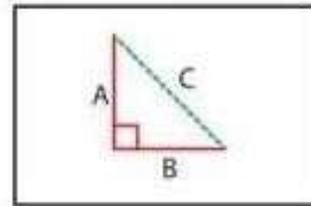
Spherical



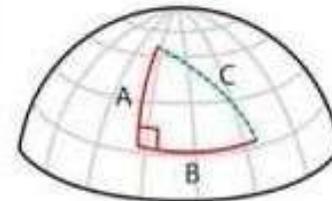
Hyperbolic

Euclidean

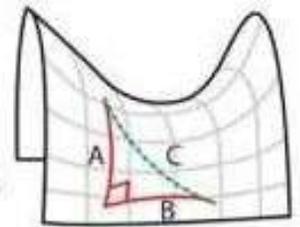
Non-Euclidean



Euclidean
 $a^2 + b^2 = c^2$



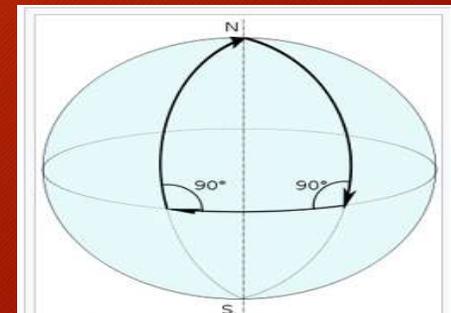
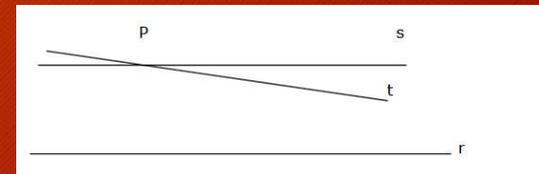
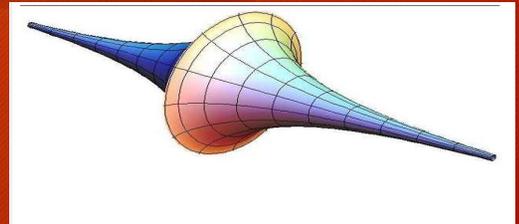
Spherical
 $\cos a \times \cos b = \cos c$



Hyperbolic
 $\cosh a \times \cosh b = \cosh c$

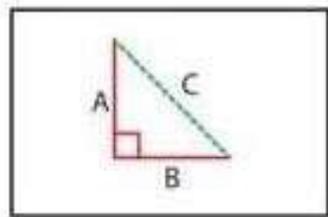
Geometrie Non Euclidee.

Tipo di geometria	Numero di parallele	Somma degli angoli in un triangolo	Rapporto tra circonferenza e diametro in un cerchio	Curvatura
Iperbolica	Infinito	$< 180^\circ$	$> \pi$	< 0
Euclidea	1	180°	π	0
Ellittica	0	$> 180^\circ$	$< \pi$	> 0

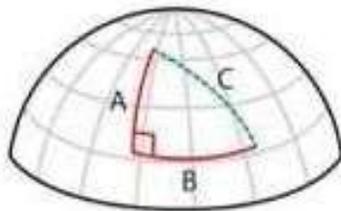


La Geometria sferica è simile alla geometria

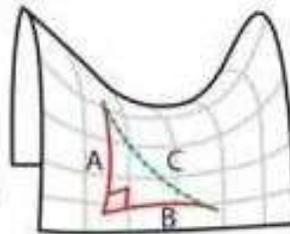
Geometrie Non Euclidee.



Euclidean
 $a^2 + b^2 = c^2$



Spherical
 $\cos a \times \cos b = \cos c$



Hyperbolic
 $\cosh a \times \cosh b = \cosh c$

E' abbastanza evidente che:

La somma degli angoli interni i A,B,C sia
- maggiore di 180° sulla sfera (geometria ellittica) ;

- minore di 180° sulla superficie iperbolica

Le rette nella geometria non euclidea sono dette **Geodetiche**, la distanza più breve fra due punti

- sono di lunghezza infinita nella Geometria Euclidea e Iperbolica

- sono le circonferenze massime su una sfera e hanno lunghezza finita.

Geometrie Non Euclidee.

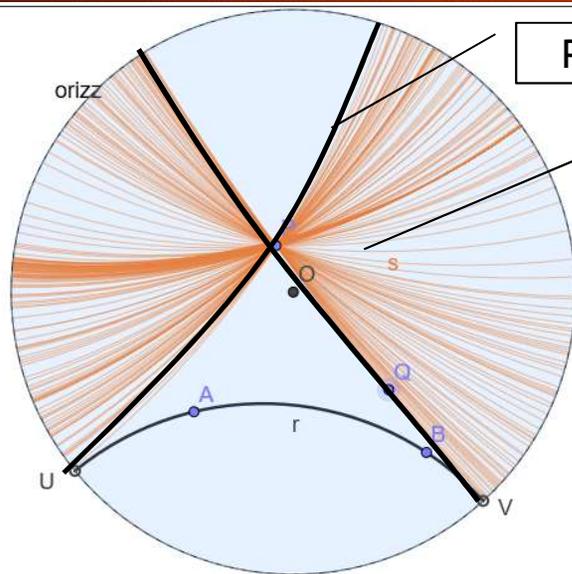
Nelle geometrie non Euclidee non esiste più la **similitudine**: non è più possibile rappresentare gli oggetti in scala!

Valgono ancora i tre criteri di uguaglianza dei triangoli, perché non dipendono dal V Postulato

Si aggiunge il **IV criterio di uguaglianza dei triangoli**:
Triangoli che hanno angoli uguali sono congruenti.

Geometrie Non Euclidee. Geometria Iperbolica

Piano iperbolico
Rette iperparallele
Fissato P, trascinare Q



Parallele

Superparallele

V Postulato: dati in un piano una retta ed un punto esterno, per il punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data (Lobacevskij 1793-1856)

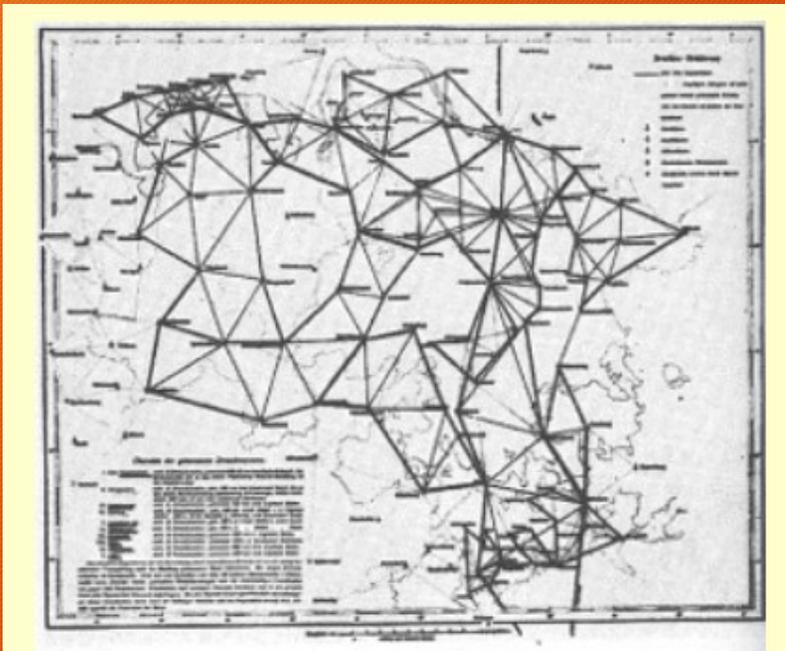
Cerchio di Henri Poincaré
(1854-1912)

Lo Spazio intorno a noi è Euclideo?

Carl Friedrich Gauss (Germania 1777-1855), un matematico tedesco, fu il primo a prendere in considerazione un'indagine empirica della struttura geometrica dello spazio. Egli pensò di fare un test sulla somma degli angoli di un enorme triangolo stellare e ci sono rapporti secondo cui avrebbe effettivamente effettuato un test, su piccola scala, di **triangolazione** sulla cime delle montagne, in Germania.

Gauss non pubblicò mai i suoi studi:

«temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute...» (*lettera scritta a Bessel il 27 gennaio 1829*)

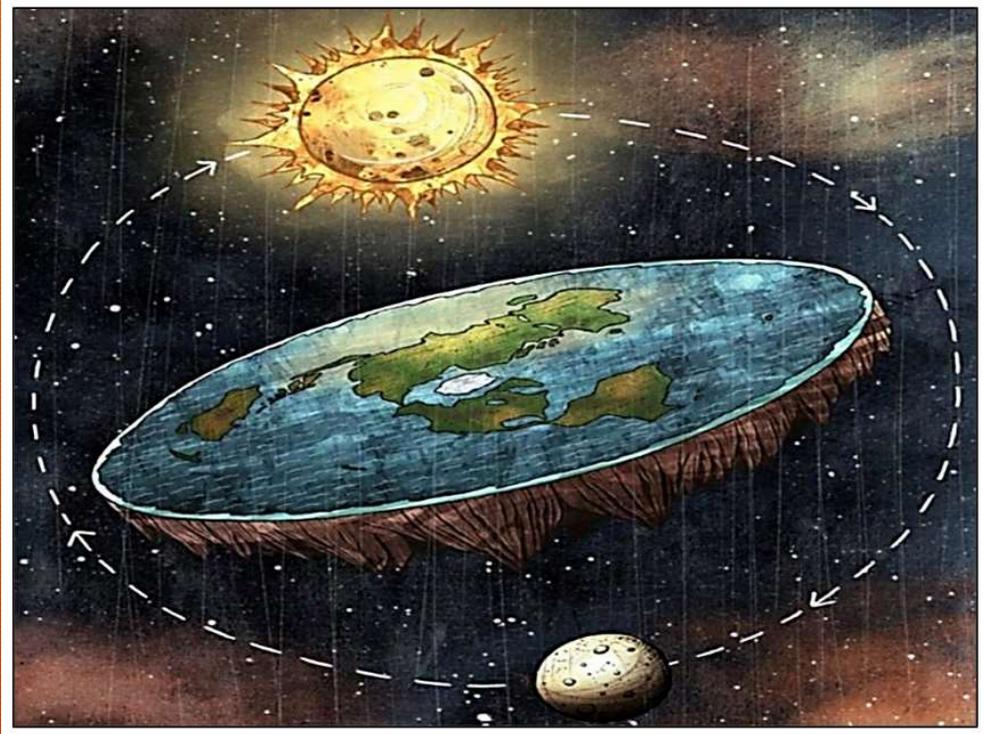


Nel 1820 Gauss fu incaricato di un progetto di rilevamento cartografico dello stato tedesco dell'Hannover.

Doveva rilevare enormi triangoli i cui vertici erano costituiti da campanili o cime di montagne

Gauss pubblicò (1827) in *Disquisitiones generales circa superficies curvas* che il più grande di quei triangoli misurato (quello che aveva come vertici le cime dei monti Hohenhagen, Brocken, Inselberg) aveva come somma degli angoli 180° , nei limiti della precisione degli strumenti di misura.

La Terra piatta.

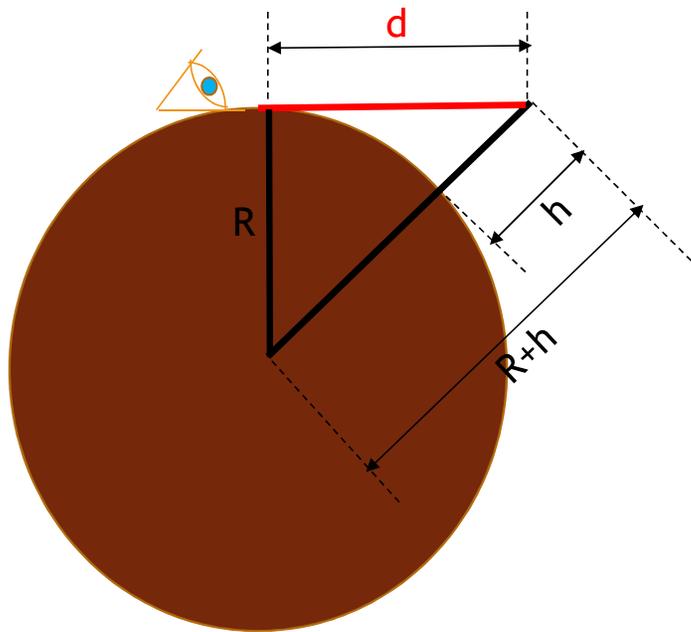


I Terrapiattisti

Se la Terra è piatta allora deve valere il Teorema di Pitagora

Misuriamo l'altezza degli oggetti all'orizzonte

I Terrapiattisti



$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(R + h)^2 - R^2} = \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} \\&= \sqrt{2Rh + h^2} \cong \sqrt{2Rh} = \sqrt{2R} * \sqrt{h} \\&= 3,57\sqrt{h} \text{ Km}\end{aligned}$$

h : altezza all'orizzonte, in m

d : distanza all'orizzonte, in Km

R = raggio terrestre, 6370 Km

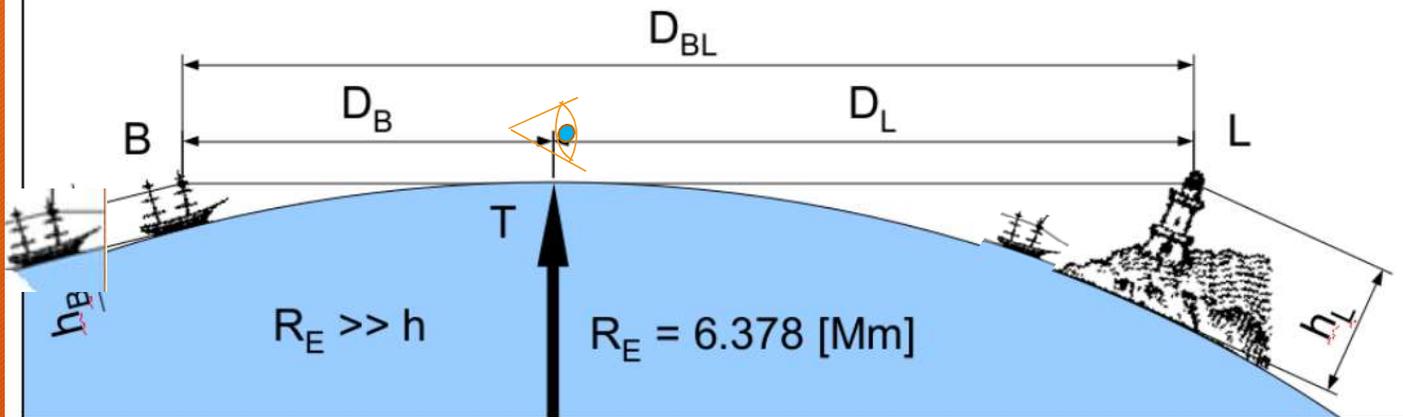
$$\text{Se } h = 1\text{m} \rightarrow d = 3,57 \text{ Km}$$

I Terrapiattisti

$$D_{BL}[Km] = D_B + D_L = \sqrt{2 \cdot R \cdot h_B + h_B^2} + \sqrt{2 \cdot R \cdot h_L + h_L^2} \sim 3.57 \cdot (\sqrt{h_B} + \sqrt{h_L})$$

$$D_L[Km] = \sqrt{2 \cdot R \cdot h_L + h_L^2} \sim \sqrt{2 \cdot 6.378 \cdot h_L} = \sqrt{12.756 \cdot h_L} = 3.57 \cdot \sqrt{h_L}$$

$$D_B[Km] = \sqrt{2 \cdot R \cdot h_B + h_B^2} \sim \sqrt{2 \cdot 6.378 \cdot h_B} = \sqrt{12.756 \cdot h_B} = 3.57 \cdot \sqrt{h_B}$$



h_B e h_L sono in metri
 D_{BL} è in Km

Raggio terrestre (km)	6370
h (m)	D(Km)
1,7	4,7
2	5,0
20	16,0
30	19,5
50	25,2
100	35,7

I Terrapiattisti

Poiché gli oggetti spariscono alla vista oltre l'orizzonte, all'aumentare della distanza dall'osservatore, la Terra non è piatta!

La curvatura dello Spazio

Nella geometria euclidea si implica, seppur tacitamente, che la retta è infinita

con **Riemann** si apre l'ipotesi della curvatura dello spazio.

Fu il primo ad introdurre una **distinzione tra illimitatezza e infinità**

Uno spazio curvo, anche lievemente, sarebbe illimitato, ma finito.

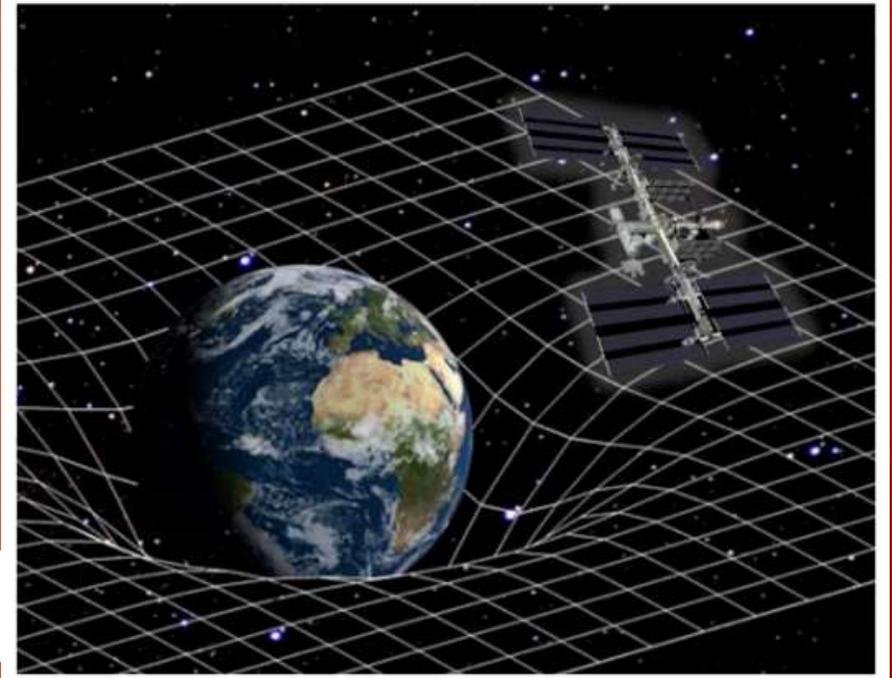
Lo Spazio di Einstein

Dallo Spazio allo Spazio-Tempo

Nasce l'idea che forze di connessione (tra corpi materiali?) potessero influenzare la natura metrica dello spazio (o addirittura dello spazio-tempo)

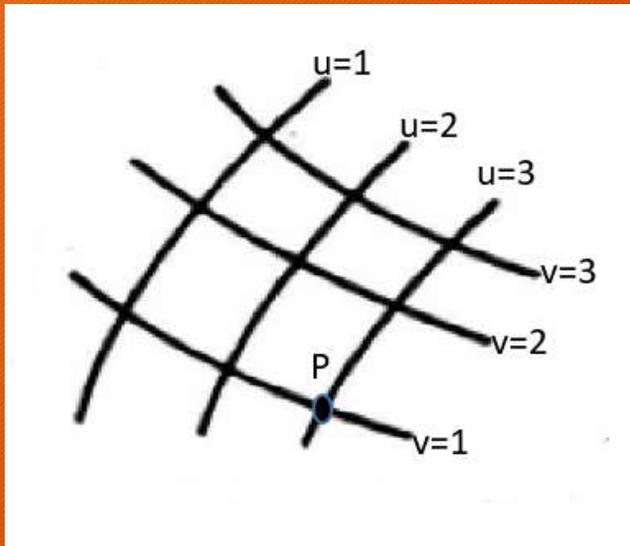
Lo spazio passa da 3 a 4 dimensioni. Si aggiunge il tempo

Lo Spazio e il Tempo non sono più indipendenti e interagiscono



Lo Spazio di Einstein

Le coordinate Cartesianhe, rigide e assolute, devono essere sostituite dalle coordinate curve di Gauss, Riemann, **Ricci Curbastro**



Equazioni differenziali

$P: u, v$

$P': u + du, v + dv$

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

L'equazione gravitazionale di Einstein
contiene il Tensore di Ricci!

Lo Spazio di Einstein

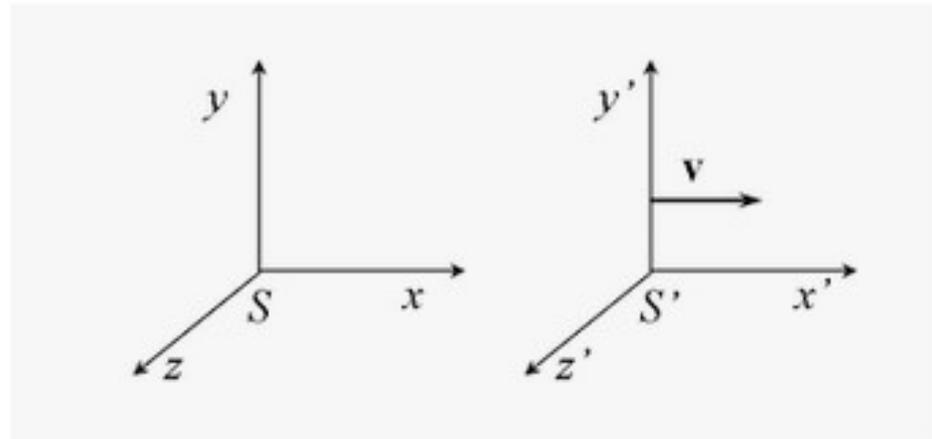
Con la Relatività Generale (1915) la gravità diventa una proprietà geometrica: i corpi, tra cui la luce, che sembrano descrivere traiettorie curvilinee stanno in realtà procedendo lungo le geodetiche dello spazio-tempo incurvato.

Lo Spazio è “**mollusco**” che avvolge tutte le cose, capace di flettersi, piegarsi, incresparsi.

Lo Spazio di Einstein (relatività ristretta, (1905)

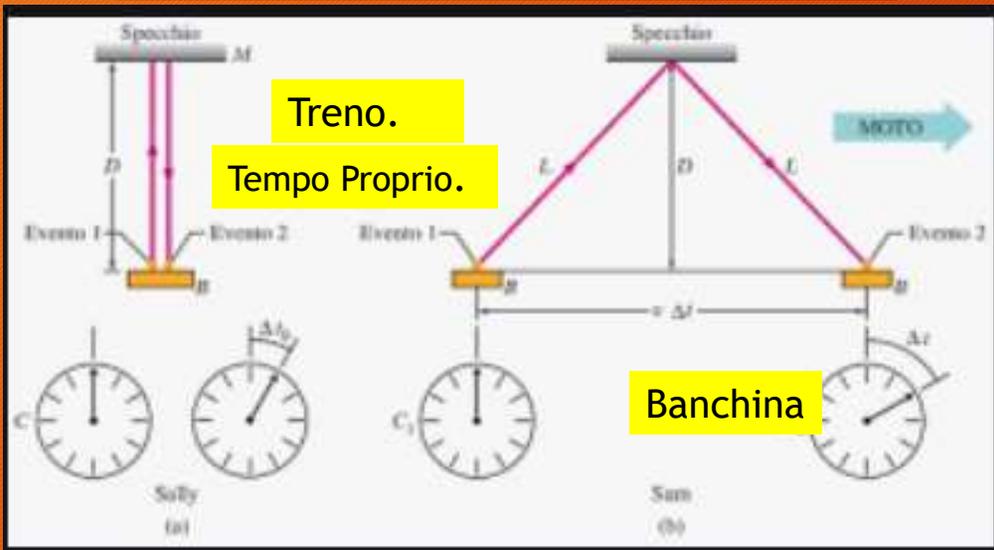
Trasformazione di Lorentz delle coordinate (Relatività ristretta)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Lo Spazio di Einstein (relatività ristretta)

Dilatazione del tempo



$$D = ct'; \quad (ct)^2 = (vt)^2 + D^2 = (vt)^2 + (ct')^2$$

Osservatore sul treno è fermo sul treno insieme al sistema di misura: Torcia + Specchio. Tempo proprio

Osservatore sulla banchina: il treno si muove. Dalla banchina si misura il tempo che la luce impiega per andare dalla torcia allo specchio.

$$\Delta t_{\text{stazione}} = \frac{\Delta t_{\text{treno}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_{\text{treno}}$$

$\gamma \gg 1$

Lo Spazio di Einstein (relatività ristretta)

Dilatazione del tempo proprio

$$\Delta t_{\text{stazione}} = \frac{\Delta t_{\text{treno}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \gamma \cdot \Delta t_{\text{treno}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

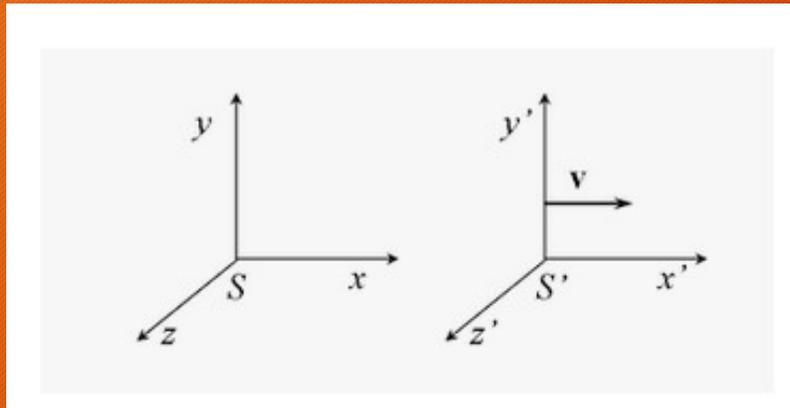
Velocità della luce

c_0 (km/s)	300.000	1.080.000.000 km/h
--------------	---------	--------------------



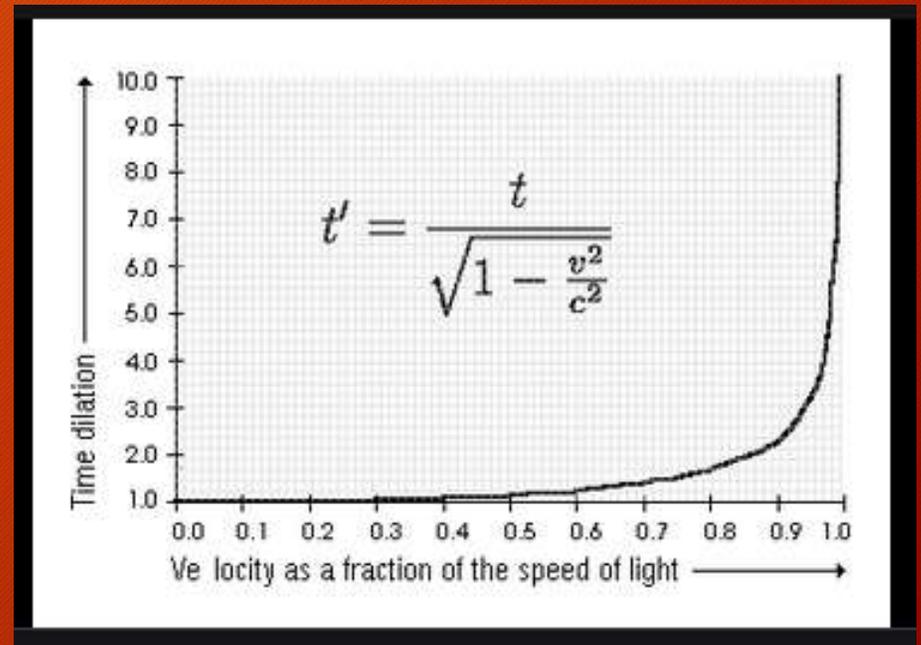
Lo Spazio di Einstein (relatività ristretta)

Dilatazione del tempo proprio

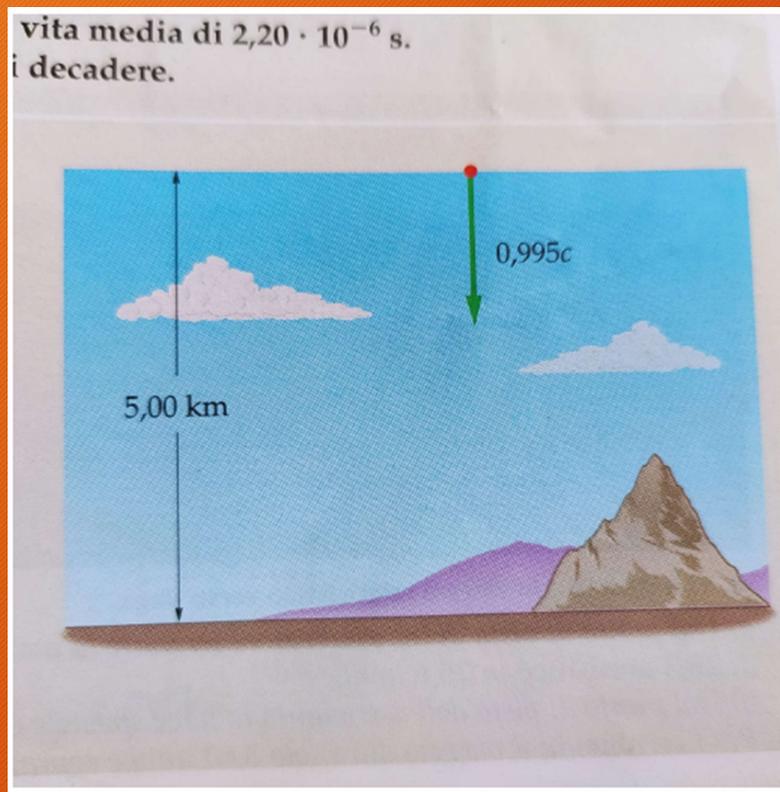


Velocità della luce

c_0 (km/s)	300.000	1.080.000.000 km/h
--------------	---------	--------------------



Esperimento: Tempo di osservazione di un Muone



Un muone, particella sub atomica, che si forma a causa della radiazione cosmica nell'atmosfera, viaggia alla velocità di $0,995c$, e ha un tempo di vita proprio di $2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Quanto è il suo tempo di vita visto da un osservatore fermo sulla Terra?

$t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s (tempo proprio di vita del muone nel suo sistema di riferimento)

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,2 * \frac{t_0}{\sqrt{1 - 0,992}} = t_0 * 10 = 22 * 10^{-6} s$$

(Tempo di vita del muone per l'osservatore)

$$d = v * t = 0,995c * 22 * 10^{-6} s = 6,57 km$$

(distanza percorsa dal muone nell'atmosfera terrestre)

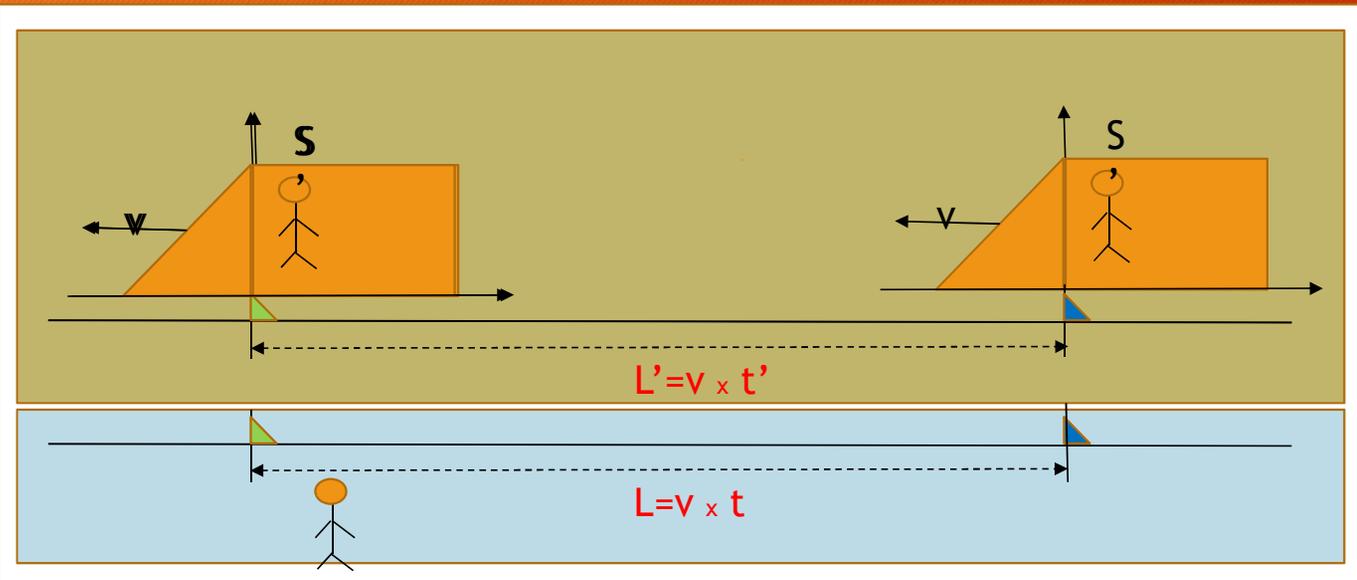
Conseguenze biologiche

Un astronauta che viaggia nello spazio invecchia più lentamente di uno sulla Terra e precisamente dello stesso fattore $1/\gamma$, di un orologio sulla navicella spaziale che va più lentamente.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lo Spazio di Einstein (relatività ristretta)

E lo spazio? Cosa avviene allo spazio?



Lo spazio si riduce del fattore γ !!!

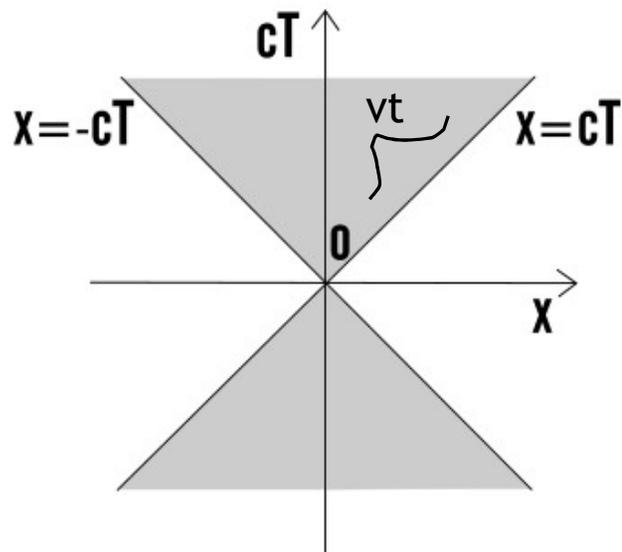
$$L' = v * t'$$
$$L = v * t$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{t'}{t}$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{t'}{\gamma t'} = \frac{1}{\gamma}$$

Minkowsky: Lo SpazioTempo (relatività ristretta)

Spazio e tempo non sono indipendenti



Estensione delle bisettrici per tempi negativi.

«Le concezioni di spazio e di tempo che desidero esporvi sono sorte dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò sta la loro forza. Esse sono fondamentali. D'ora in poi lo spazio di per sé stesso o il tempo di per sé stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente.»

(Hermann Minkowski, [1908](#))

Minkowsky: Lo SpazioTempo

Spazio e tempo non sono indipendenti

Geometria Euclidea- Spazio Assoluto. Tempo Assoluto

Nello spazio-tempo galileiano, la distanza fra due oggetti nello spazio e fra due eventi nel tempo è una quantità assoluta, non dipende dal sistema di riferimento inerziale in cui è posto l'osservatore.

Geometria Non Euclideo - SpazioTempo Assoluto

Nella **relatività ristretta**, lo spazio e il tempo diventano invece relativi. Vi è comunque una "distanza" che non dipende dal riferimento. Questa "distanza" fra due eventi è detta **separazione spazio-temporale** ed è la quantità (Herman Minkowsky, 1907):

$$d^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 * dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 * dt'^2$$

Lo SpazioTempo Cosa è cambiato?

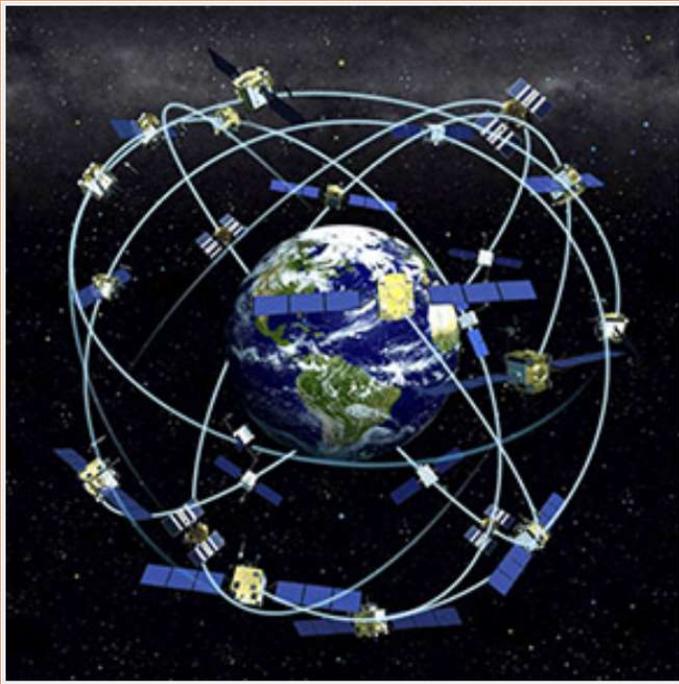
La geometria è relativa all'osservatore, al suo sistema di riferimento. **Ma non è arbitraria!**

Il punto di osservazione cambia la visione dello spazio intorno a noi. che senso avrebbe la **Prospettiva**, introdotta da Brunelleschi (Firenze, 1377- Firenze, 15 Aprile 1446), se non ci fosse l'uomo ad osservare?

L'Arte ha spesso preceduto la geometria e il pensiero filosofico.

IL GPS e la Relatività

GPS è l'acronimo di Global Position System



E' un sistema di 24 satelliti che ruotano due volte al giorno intorno alla Terra con un raggio di 26.500 Km

Il principio di funzionamento dei sistemi GPS si basa sulla misura del tempo impiegato da un segnale radio a percorrere la distanza satellite-ricevitore

Così che da ogni punto della Terra siano sempre visibili almeno 4 satelliti.

La posizione corretta si calcola confrontando i tempi di transito dei 4 satelliti ottenendo una precisione che

Sulla Terra equivale a trovare una moneta da 1 Euro ad una distanza di 40 km.

IL GPS e la Relatività

GPS è l'acronimo di Global Position System

Gli orologi a bordo dei satelliti anticipano di circa 7,7 microsecondi al giorno per gli **effetti relativistici della loro velocità (3.8 Km/s)** provocando un errore nelle distanze giornaliere di $c \cdot t = 2,3\text{Km!!!}$

L'errore **totale, relativistico**, degli orologi sui satelliti è di circa $38\mu\text{s}$ al giorno a causa dell'anticipo provocato dalla gravitazione sul satellite di $45.7\mu\text{s}$, che si somma ai $-7,7\mu\text{s}$ causati dalla velocità del satellite rispetto della Terra.

Teoria delle Stringhe

Quante dimensioni ha l'Universo?

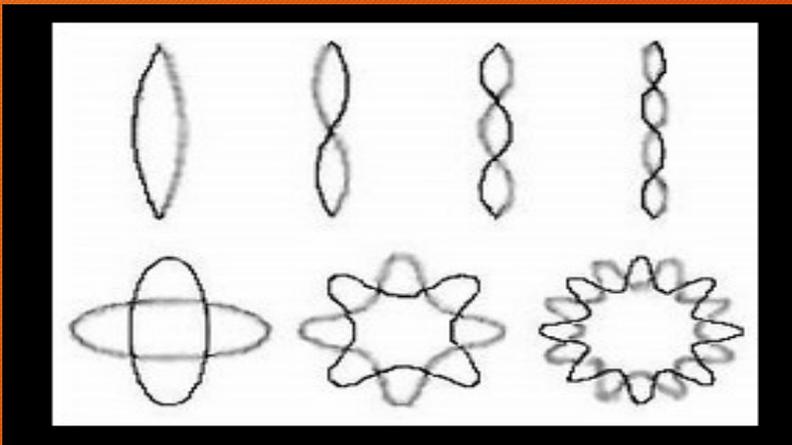
Si fonda sul principio secondo cui la **materia**, la **radiazione** e, sotto certe **ipotesi**, lo **spazio** e il **tempo** siano la manifestazione di entità fisiche fondamentali che, a seconda del numero di **dimensioni** in cui si sviluppano, sono chiamate *stringhe*

Gabriele Veneziano (Firenze, 7/09/1972) è stato uno dei padri fondatori insieme a Brian Green

«Le particelle non sono puntiformi ma consistono di un minuscolo anello unidimensionale che danza, vibra, oscilla come un elastico infinitamente sottile chiamato String, Corda»

Teoria delle Stringhe

Quante dimensioni ha l'Universo?



Una caratteristica interessante della teoria delle stringhe è che essa predice il numero di dimensioni che l'Universo dovrebbe avere.

Più precisamente, le teorie bosoniche implicano 26 dimensioni, mentre le superstringhe la **M-teoria** richiede 10 o 11 dimensioni. Nelle teorie di stringa bosonica, le 26 dimensioni risultano dall'equazione di Poljakov

Conclusioni

Una Geometria non può essere più vera di un'altra: può essere soltanto più comoda .

Henri Poincaré (Nancy 1854- Parigi 1912)

Fine della V lezione

Non finisce qui e, forse si torna all'inizio, con
Eraclito

TUTTO SCORRE, TUTTA CAMBIA

Fine del corso

GRAZIE!