I numeri primi

Definizione

E’ possibile definire numero primo, o semplicemente primo, un **numero naturale maggiore di 1 divisibile per 1 e per se stesso**.

I numeri primi sono uno dei concetti base della teoria dei numeri, ovvero di quell’area della matematica che studia ed ha come oggetto di interesse i **numeri interi**.

Alcune caratteristiche fondamentali:

- essere la base di tutti gli altri numeri;
- non essere multipli;
- non essere 1 o 0;
- avere solo ed esclusivamente due divisori, il numero 1 e se stessi.

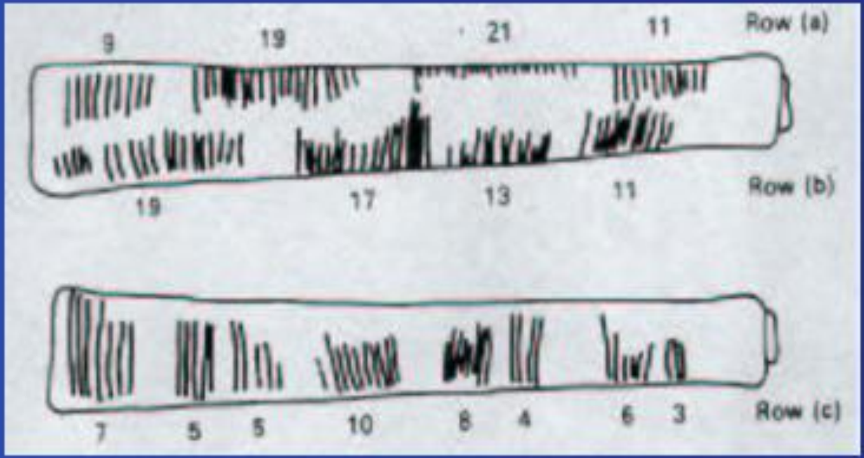
Un po’ di storia

La **loro importanza risale all’antichità**.

La più antica testimonianza risale al 6500 a.c. con

Trovato nel 1950 tra i monti dell'Africa equatoriale centrale è attualmente conservato presso il museo di storia naturale di Bruxelles.

Ma che relazione ha con i numeri primi?



in una delle colonne in cui è suddiviso l'osso compaiono 11, 13, 17 e 19 tacche...

Greci

Teorema

Ogni intero è esprimibile come prodotto di primi.

Dimostrazione

Sia n non primo $\Longrightarrow n = a \cdot b$.
Se a e b sono primi, la tesi è dimostrata.
Se a e b non primi $\Longrightarrow a = c \cdot d, b = e \cdot f$ con $c, d < a$ e $e, f < b$

Se c, d, e, f sono primi la tesi è dimostrata; altrimenti continuo la fattorizzazione e alla fine si ottiene $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ con $p_1, \ldots, p_r$ primi.

Euclide

Quanti sono i numeri primi?

E’ possibile che ne esista un numero finito?

La dimostrazione è presentata da Euclide nel IX libro degli Elementi.

Siano $p_1,p_2,\ldots,p_n$ i soli numeri primi.

Prendiamo il loro prodotto e sommiamoci 1:
$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$

Allora o P è a sua volta primo, e allora ne abbiamo trovato un altro, oppure è composto (cioè divisibile per numeri diversi da $p_1,p_2,\ldots,p_n$).

Esempi

Siano $2, 3, 5, 7$ i soli primi

$$\Longrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$$

211 non è divisibile per $2, 3, 5, 7$.

E in realtà 211 è primo perchè non è divisibile per 11, 13 e $17^2 > 211$.

Siano $2, 3, 5, 7, 11$ i soli primi

$\Longrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$

2311 non è divisibile per $2, 3, 5, 7, 11.$

E in realtà 2311 è primo perchè non è divisibile per nessun primo minore o uguale a 47 e $53^2 > 2311.$

Siano $2, 3, 5, 7, 11, 13$ i soli primi

$\Longrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$

30031 non è divisibile per $2, 3, 5, 7, 11, 13$...

...ma 30031 NON è primo! E' divisibile per 59, infatti

$$30031 \div 59 = 509.$$

Con la dimostrazione di Euclide svanisce la possibilità di costruire una “tavola periodica” che comprenda tutti i numeri primi.

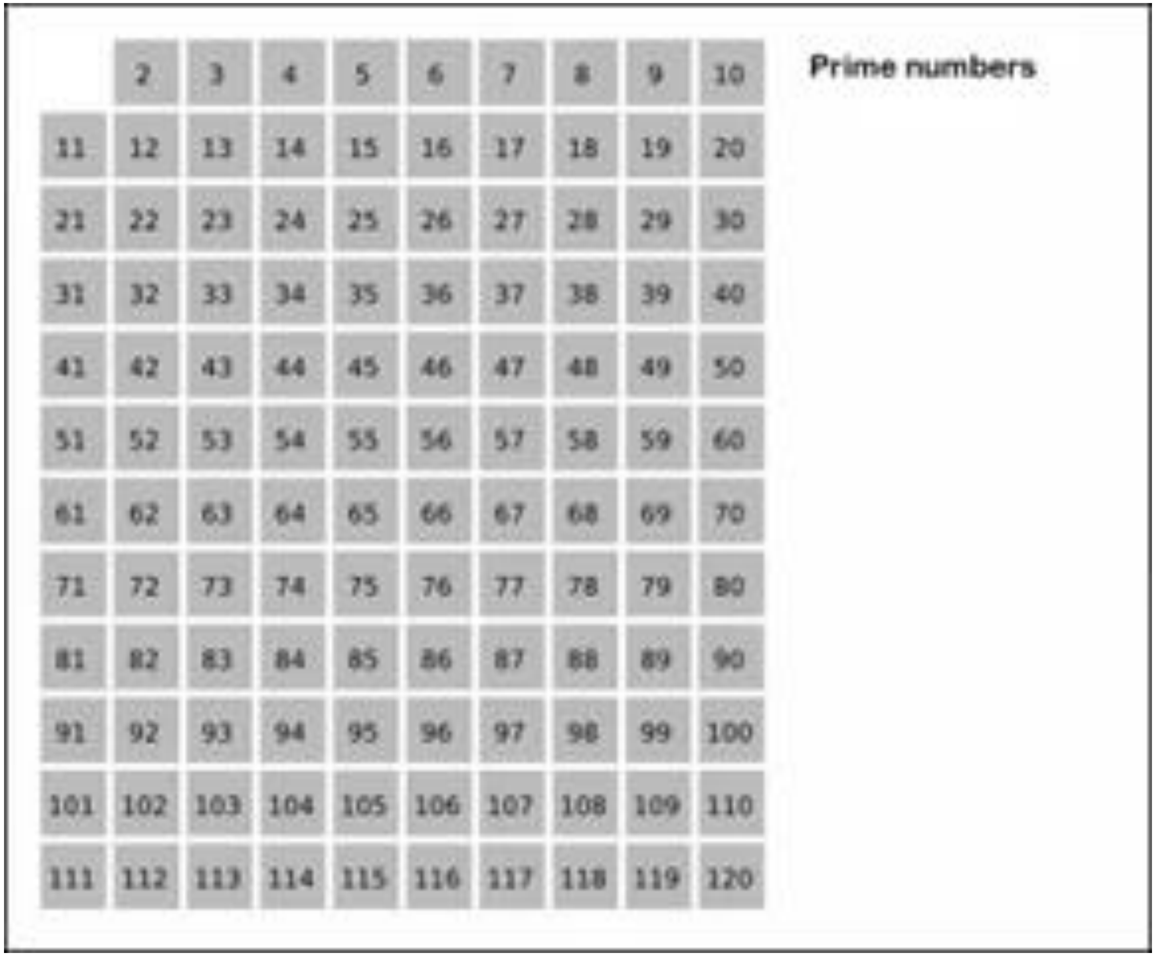
Eratostene

Inventò un metodo per individuare i numeri primi!

Crivello di Eratostene

Il crivello è una specie di grosso **setaccio** e il crivello di Eratostene è proprio questo: un setaccio che serve a separare i numeri primi dai numeri composti.

Come funziona



Fermat

Riteneva di aver trovato una formula che producesse solo numeri primi.

$$2^{2^n}+1$$

ennesimo numero di Fermat

Esempi

- $n = 1$

$\Longrightarrow 2^2 + 1 = 5$

primo numero di Fermat

- $n = 2$

$\Longrightarrow 2^4 + 1 = 17$

secondo numero di Fermat

- $n = 3$

$\Longrightarrow 2^8 + 1 = 257$

terzo numero di Fermat

- $n = 4$

$\Longrightarrow 2^{16} + 1 = 65537$

quarto numero di Fermat

Ma……

- $n = 5$

$\Longrightarrow 2^{32} + 1 = 4294967297$

Questo numero non è primo.

Infatti $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417$

- $n > 5$

$\Longrightarrow$ la formula non fornisce numeri primi!

Eulero

Scopre un algoritmo che da come risultato alcuni numeri primi:

$$x^2 + x + 41$$

che genera numeri primi sostituendo ad x i numeri compresi tra 0 e 39.

Considerando la formula

$x^2 + x + q$

si accorge che, scegliendo $q = 2, 3, 5, 11, 17$ si trovano numeri primi per ogni valore di x compreso tra 0 e $q - 2$.

$x^2 + x + q$

$q = 5$, $n = 0 \leq x \leq q - 2 = 5 - 2 = 3.$

Prendiamo $x = 2$:

$\Longrightarrow 2^2 + 2 + 5 = 11$

Goldbach

Egli, in una lettera ad Eulero, propone le seguenti congetture:

- ogni numero dispari maggiore di 5 può essere scritto come somma di 3 numeri primi;
- ogni numero pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di 2 numeri primi.

Prima congettura:

$n = q_1 + q_2 + q_3$

dove n è un numero dispari maggiore di 5,

q_1,q_2,q_3 sono numeri primi.

Esempi:

Prendiamo $n = 11$:

Allora $q_1 = 3$, $q_2 = 3$, $q_3 = 5$ che sono numeri primi;

Seconda congettura:

$n = q_1 + q_2$

dove n è un numero pari maggiore di 2, q_1,q_2 sono numeri primi.

Esempi:

Prendiamo $n = 16$:

Allora $q_1 = 5$, $q_2 = 11$ che sono numeri primi;

infatti $5 + 11 = 16$

Questi due enunciati, oggi noti come congettura ternaria e binaria di Goldbach, sono ancora privi di dimostrazione.

Per incentivare i matematici alla ricerca, un'università americana ha messo in palio 2.000.000 di dollari a chi riuscisse a dimostrarli.

Numeri primi gemelli

Si definiscono **numeri primi gemelli** due numeri primi che differiscono tra loro di due .

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151), (179, 181), (191, 193), (197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271), (281, 283), (311, 313), (347, 349), (419, 421), (431, 433), (461, 463), (521, 523), (569, 571), (599, 601), (617, 619), (641, 643), (659, 661), (809, 811), (821, 823), (827, 829), (857, 859), (881, 883)

Tutte le coppie di numeri primi gemelli, ad eccezione di (3,5), sono della forma (6n-1,6n+1), dove n è un numero naturale.

Nella letteratura

I numeri primi gemelli fanno da filo conduttore al romanzo *La solitudine dei numeri primi* di Paolo Giordano.

Nella storia i due protagonisti vengono associati a una coppia di numeri primi gemelli.

Queste coppie di numeri così solitarie e rare in mezzo alla moltitudine di tutti i numeri,

rappresentano due numeri vicinissimi fra loro, ma mai consecutivi, cioè mai attaccati fra loro, mai uniti uno dopo l'altro, perché ci sarà sempre un altro numero in mezzo (un numero necessariamente pari) a dividerli.

I numeri solitari

All’interno della famiglia dei numeri naturali, si possono individuare dei raggruppamenti e definire per essi il grado di solitudine.

Un gruppo di numeri è *solitario* se è finito, poiché “non conosce” tutti gli altri infiniti numeri.

Considerando invece famiglie non banali, ovvero quelle infinite, si definisce grado di solitudine la somma dei reciproci di tutti i membri:

$$\gamma = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

Se γ è un numero finito la famiglia è solitaria, altrimenti no.

La famiglia dei numeri naturali non è solitaria!

Infatti, costruendo la somma dei reciproci, si ottiene la famosa serie armonica, che Eulero dimostrò divergere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Se prendiamo in considerazione la famiglia dei quadrati, la somma degli inversi è finita, e in particolare risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.64$$

Quindi i quadrati sono solitari!!!

E i numeri primi?

La domanda è se la somma dei reciproci dei numeri primi è finita oppure no. Ancora una volta Eulero dimostrò che tale somma è infinita, sfruttando la seguente, geniale uguaglianza che diede avvio alla teoria analitica dei numeri

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_p \frac{p}{1-p}$$

E i primi gemelli?

Nel 1919 *Viggo Brun* dimostrò che la somma dei reciproci, siano essi finiti o no, converge a una costante matematica ,la costante di Brun, che vale circa 1,90.

È dunque sbagliato affermare che i numeri primi sono solitari.

Tuttavia diventa magicamente corretto se dopo “primi” aggiungiamo la parola “gemelli”!

Per essere corretto il titolo del libro di Giordano dovrebbe essere

La solitudine dei numeri primi gemelli

Suggerimento

https://www.youtube.com/watch?v=FCSaXPYJ1zk

Conferenza tenuta da Piergiorgio Odifreddi

a studenti dell’Università di Torino