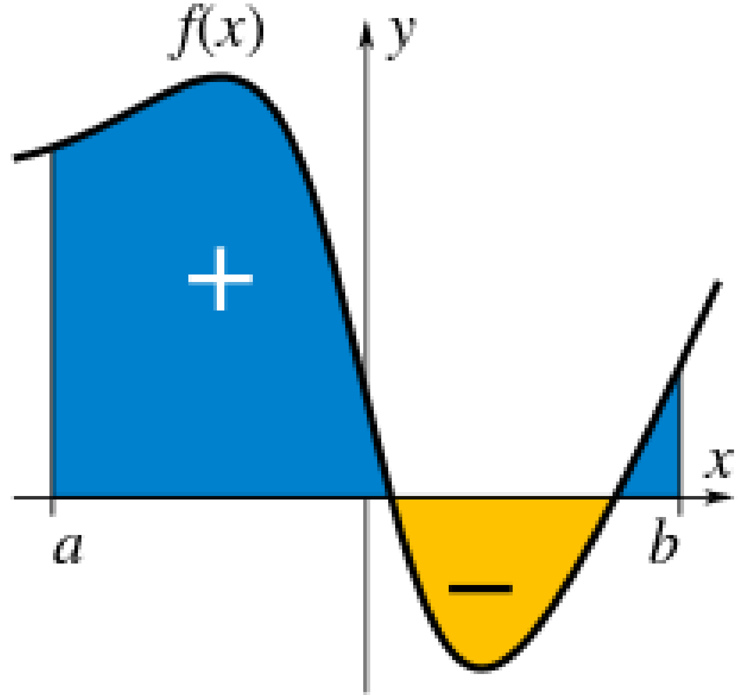
Integrali

$$\int \quad \int \quad \int$$

L'**integrale** è un operatore che, nel caso di una funzione di una sola variabile a valori reali non negativi, associa alla funzione l'area sottesa dal suo grafico entro un dato intervallo [a,b] nel dominio.

Se la funzione assume anche valori negativi, allora l'integrale può essere interpretato geometricamente come l'area *orientata* sottesa dal grafico della funzione.



Notazione

Il simbolo che rappresenta l'integrale nella notazione matematica fu introdotto da Leibniz alla fine del XVII secolo. Il simbolo si basa sul carattere ſ (esse lunga), lettera che Leibniz utilizzava come iniziale della parola *summa* (*ſumma*), poiché questi considerava l'integrale come una somma infinita di addendi infinitesimali.

Esse lunga

La **s lunga** (ſ) è una forma antica della lettera
s **minuscola** facilmente confondibile con una **f**.

La *s* lunga, derivata dalla corsiva latina, è molto simile ad un segno di spunta allungato, ma con una forma più verticale.

La *s* lunga è stata impiegata in praticamente tutte le lingue d'Europa che hanno usato l'alfabeto latino.

<u>In francese</u> , ad esempio, Corneille aveva proposto di conservare la *s* lunga solo per marcare il prolungamento della vocale precedente, convenzione che in seguito non venne seguita.

In tedesco

Wachstube si presta a due interpretazioni

- *Wach* + *Stube* : «camera *(Stube)* della vigilia *(Wach)*» ;
- *Wachs* + *Tube* : «tubo *(Tube)* di cera *(Wachs)*»

La grafia toglie l'ambiguità:

- *Wach* + *Stube* viene scritto *Wachſtube*
- *Wachs* + *Tube* diventa *Wachstube*.

L'uso di una *s* rotonda segna la fine virtuale di una parola in una composizione

In inglese

la 's' lunga viene chiamata

long, **medial** o **descending s** (ſ)

ed è usata quando la 's' si trova all'inizio o nella parte mediana di una parola, ad esempio in ſinfulneſs (“sinfulness”= peccaminosità).

La forma moderna della lettera è denominata

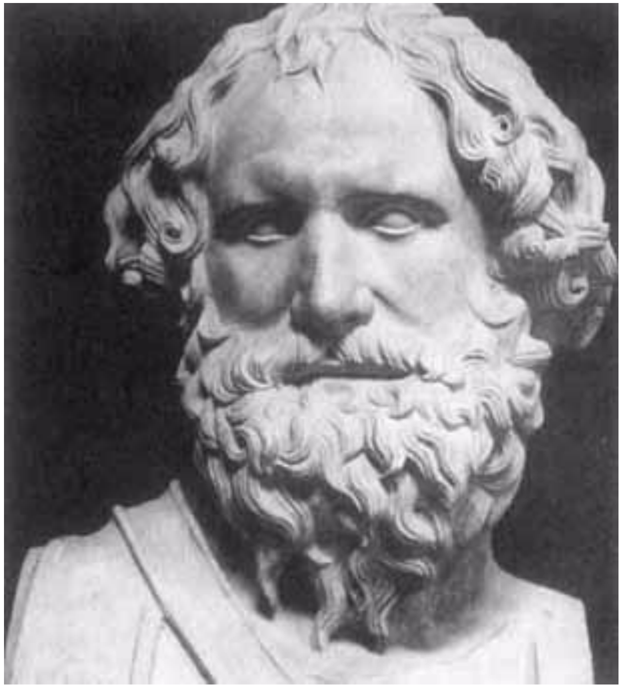
terminal o **short s**.

La scomparsa della forma lunga avviene in Inghilterra nei decenni intorno al 1800 e negli Stati Uniti intorno al 1820.

Cenni di Storia

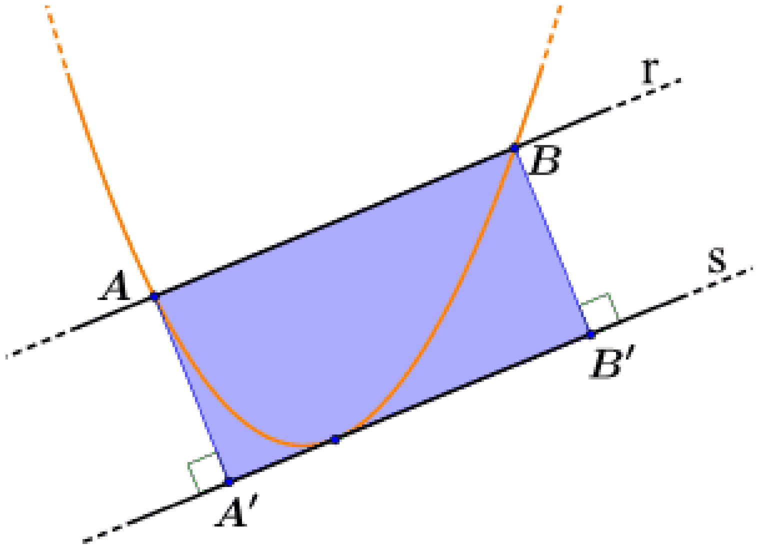
Primo fra tutti a introdurre un rudimentale calcolo integrale, fu **Archimede da Siracusa (336 a.C-30 a.C.)**.

Il concetto di integrale traspare sotto forma di calcolo di aree e volumi approssimati mediante la somma di un grande numero di elementi via via più piccoli: l’esempio applicativo più significativo è costituito dal calcolo dell’area di un segmento parabolico.



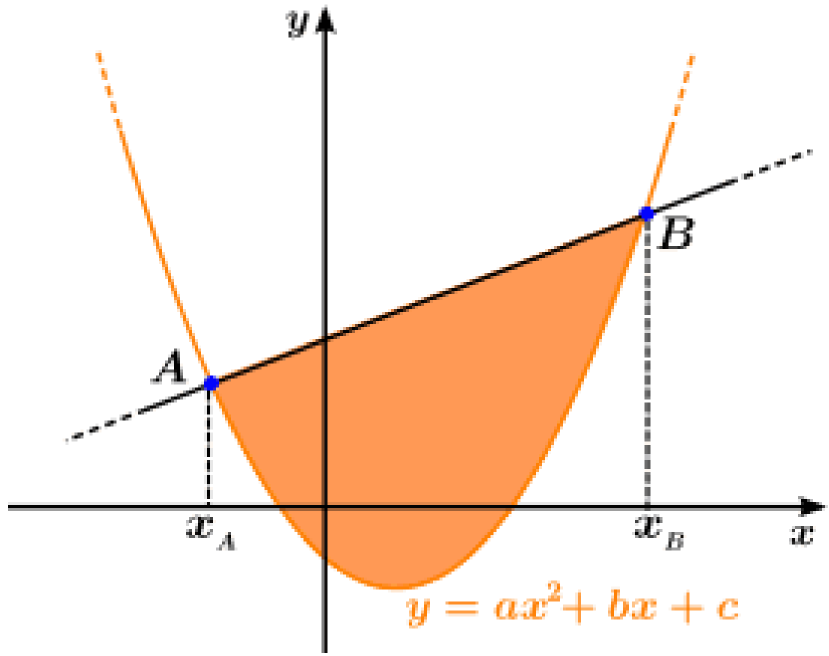
Teorema di Archimede

L'area di un segmento parabolico equivale a 2/3 dell'area del rettangolo ad esso circoscritto.



$$\text{Area segmento parabolico} = \frac{2}{3} \cdot \mathrm{A}_{ABB'A'}$$

Oppure



$$\text{Area segmento parabolico} = \frac{1}{6} \cdot |a| \cdot (x_B - x_A)^3$$

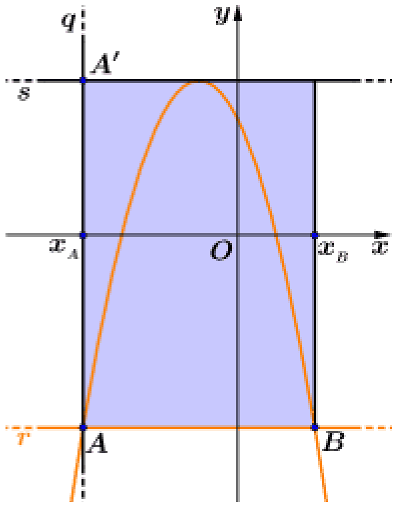
dove a è il coefficiente del termine quadratico della parabola ed x_A e x_B sono le ascisse dei punti di intersezione tra retta e parabola.

Oppure

Nello specifico, se f(x) e g(x) sono due curve tali che nell'intervallo [a,b] il grafico della funzione di f è al di sopra del grafico di g, allora

$$\text{Area tra } f \text{ e } g = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx, \text{ se } f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$$

Applicazione



Calcolare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

e dalla retta

$$r: \ y + 5 = 0$$

$$\text{Area segmento parabolico} = \int_{-4}^{2} \left[-x^2 - 2x + 3 - (-5)\right] dx =$$

$$= \int_{-4}^{2} \left[-x^2 - 2x + 8\right] dx$$

$$\int_{-4}^{2} \left[-x^2 - 2x + 8\right] dx = -\int_{-4}^{2} (x^2) dx - 2\int_{-4}^{2} (x) dx + 8\int_{-4}^{2} dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{2} - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} + 8\,[x]_{-4}^{2} =$$

$$= -24 + 12 + 48 = 36$$

Il secondo personaggio a contribuire in maniera consistente fu **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, famoso per il suo metodo degli indivisibili.

Il termine **indivisibile** potrebbe tradursi con l'espressione moderna di *figura geometrica di spessore infinitesimo*.

Principio di Cavalieri

Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto.

Nel XVII e XVIII secolo Newton, Leibniz, Bernoulli dimostrarono indipendentemente il **teorema fondamentale del calcolo integrale**, che riconduce il problema del calcolo dell’area alla ricerca della primitiva di una funzione.

Inoltre stabilisce una stretta connessione tra i concetti di integrale e di derivata per funzioni di variabile reale.

Teorema

Data la funzione $f(x):[a;\ b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si definisce funzione integrale di f la funzione F tale che

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ \text{con}\, x \in [a;\, b]$$

Se f è limitata, si ha che F è continua in $[a;\, b]$ e se f è continua in $[a;\, b]$ allora F é derivabile per ogni $x \in [a;\, b]$ e si ha:

$$F'(x) = f(x),\ \ F(a) = 0$$

Definizione

si dice **primitiva** o **antiderivata** di una funzione f una funzione derivabile F la cui derivata è uguale alla funzione di partenza. Denotando con l'apice la derivata

$$F'(x)=f(x)$$

Le primitive di una funzione sono infinite!!

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

è una primitiva di $f(x) = x$, infatti:

$$F'(x) = D\left[\frac{x^2}{2}\right] = \frac{2x}{2} = x$$

D'altra parte anche

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

è una primitiva della funzione $f(x) = x$, infatti:

$$F'(x) = D\left[\frac{x^2}{2} + 1\right] = x$$

Trapezoide

la regione di piano delimitata dalla curva della funzione $y = f(x)$ relativo all'intervallo $[a;b]$, ove $f(x)$ è *continua* e *positiva*, dalle rette verticali

$x = a$, $x = b$ e dall'asse x

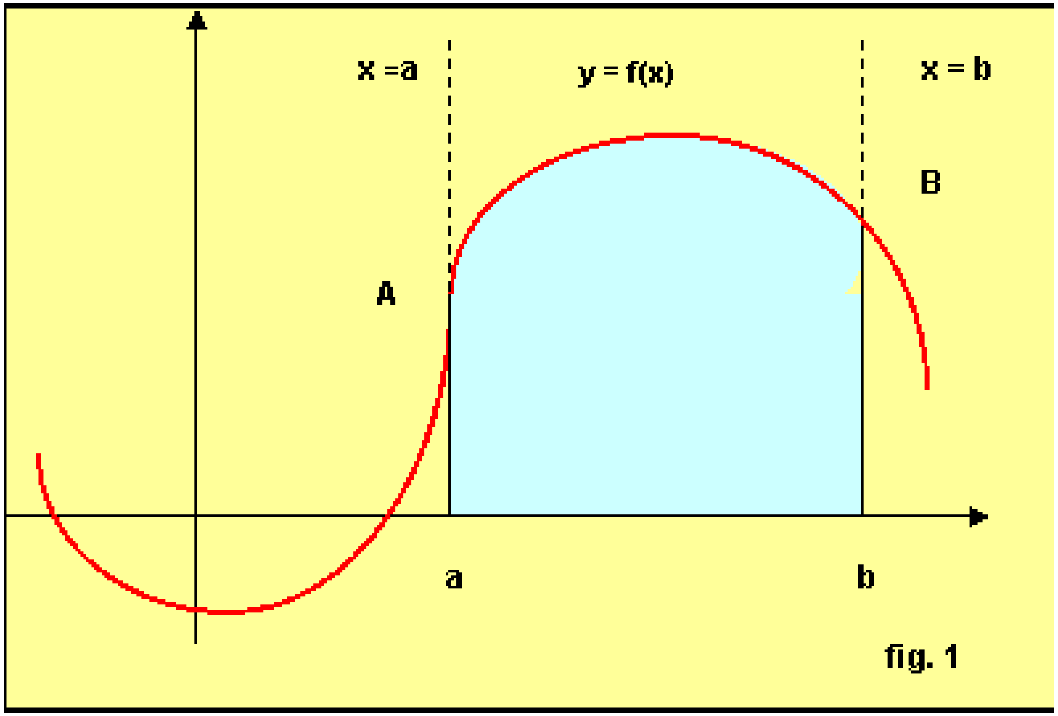


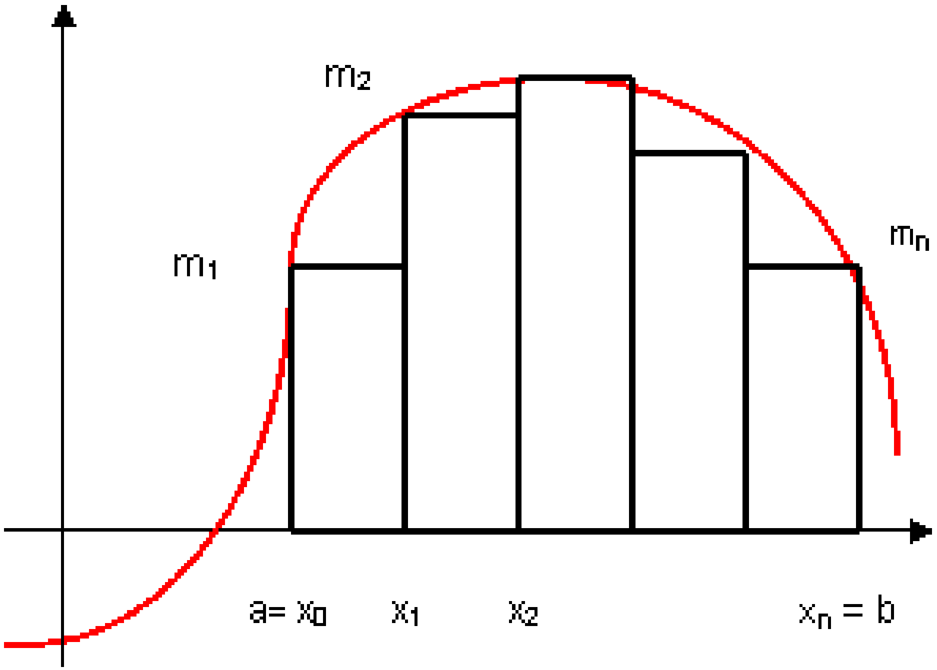
fig. 1

Calcoliamo l’area del trapezoide

- dividiamo l’intervallo [a;b] in *n* parti uguali, ciascun intervallino di suddivisione avrà ampiezza: $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
- disegniamo i rettangoli aventi per base Δx_i e per altezza il minimo valore che la funzione assume nel corrispondente intervallino di suddivisione; infatti la funzione essendo continua, il teorema di Bolzano – Weierstrass ci garantisce l’esistenza del massimo e del minimo assoluto negli intervallini considerati;

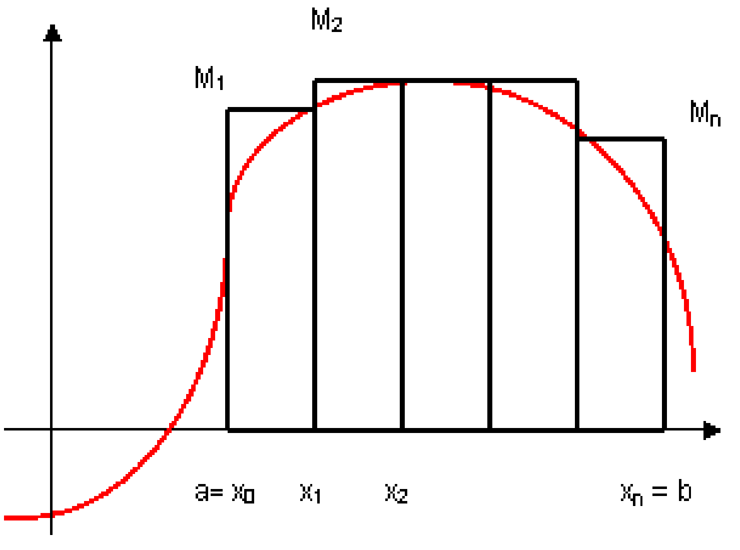
Indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti questi rettangoli la cui unione individua il *plurirettangolo inscritto* nel trapezoide:

$$s_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$



Consideriamo il *plurirettangolo circoscritto* al trapezoide, costituito dall'unione delle aree, che indicheremo con S_n, dei rettangoli aventi per base Δx_i e per altezza il massimo valore che la funzione assume nel corrispondente intervallo di suddivisione.

$$S_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$



L’area del trapezoide risulta così compresa fra le due aree per difetto sn e per eccesso Sn, ossia possiamo scrivere:

$$s_n < T < S_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i < T < \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = T$$

Così, analogamente a quanto detto per l'area del cerchio, definiamo l'area del trapezoide T nel seguente modo:

$$\boxed{Area \quad Trapezoide = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = T}$$

Integrale definito

$$\boxed{T = \int_a^b f(x)dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = T}$$

L’**integrale definito della** *f*(*x*) **esteso all’intervallo** [a;b] è il valore di un limite e quindi un qualsiasi **numero reale** ben determinato, l’**area** è sempre rappresentata invece da un **numero positivo**. Pertanto nel caso in cui *f*(*x*) sia **positiva** allora il limite è anch’esso un numero positivo e geometricamente rappresenta l’area del trapezoide relativo alla *f*(*x*) in [a;b]; nel caso in cui invece *f*(*x*) risulta **negativa** nell’intervallo d’integrazione tale limite sarà un numero negativo e solo il suo **valore assoluto** rappresenta ancora geometricamente l’area del trapezoide. Da ciò segue che l’integrale definito di una qualsiasi funzione continua, può interpretarsi come somma algebrica delle aree delle regioni di piano delimitate dalla curva *f*(*x*), dalle rette $x = a$, $x = b$ e dall’asse delle ascisse, considerando negative le regioni che sono situate al di sotto dell’asse x e positive quelle situate al di sopra

Integrali indefiniti

L'integrale indefinito è l'operazione inversa della derivata, quest'operazione consiste nel ricercare tutte le funzioni la cui derivata sia uguale ad una funzione assegnata. Queste funzioni si dicono primitive.

Per definizione si pone dunque:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow D\left[F(x) + c\right] = f(x)$$

La funzione f(x) è detta funzione integranda.

Tornando al teorema fondamentale del calcolo integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \le x \le b,$$

è una primitiva della funzione di partenza. Cioè

$$F'(x) = f(x),$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Soluzione di un integrale indefinito

- si riconosce la funzione integranda essere la derivata di una funzione nota (integrali immediati)
- l'integranda è il prodotto di due funzioni, l'integrazione per parti riduce l'integrale alla somma di due integrali, di cui uno calcolabile immediatamente grazie alla formula fondamentale del calcolo integrale.
- Se l'integranda è trasformazione di una derivata nota attraverso una qualche funzione derivabile, l'‘integrazione per sostituzione riporta il calcolo all'integrale di quella derivata nota, modificato per un fattore di proporzionalità che dipende dalla trasformazione in gioco.
- Per scomposizione

Esempi

- Integrale immediato

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

- Integrale per parti

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int xe^x\,dx$$

- f'(x) = e^x;
- f(x) = e^x;
- g(x) = x;
- g'(x) = 1

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x \cdot 1\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

Integrale per sostituzione

$$\int \frac{1}{4x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt = 1/4 \log|t| + c = 1/4 \log|4x-3| + c$$

$$4x - 3 = t$$

faccio il differenziale da una parte e dall'altra dell'uguale

$4dx = dt$

ricavo dx

$$dx = \frac{dt}{4}$$

Sostituisco quello che posso nell'integrale di partenza

$$\int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{4}$$

Per scomposizione

Calcolare $\int(3\operatorname{sen}x+2x^2)dx$

Utilizziamo la regola: $\int\sum_{i=1}^{n}a_i f_i'(x)dx=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\int f_i'(x)dx$

L'integrale proposto si può trasformare in

$3\int\operatorname{sen}x+2\int x^2dx$

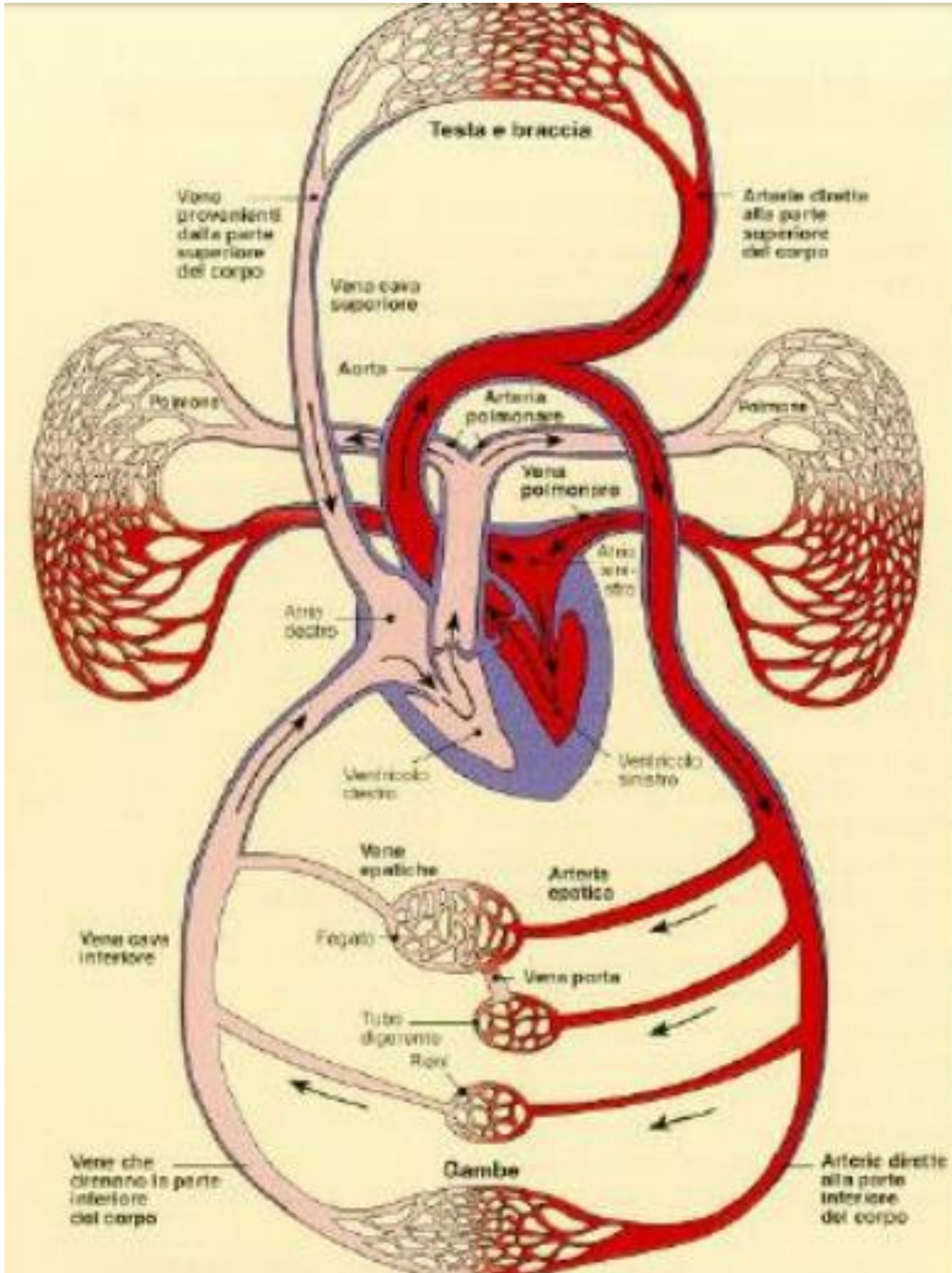
da cui, applicando le regole di integrazione elementare, si ha:

$-3\cos x+\frac{2x^3}{3}+c$

Applicazioni alla biologia

Individuazione della gettata cardiaca, ossia del volume del sangue pompato dal cuore nell'unità di tempo o meglio la velocità del flusso nell'aorta.

La misurazione avviene utilizzando un metodo detto metodo di diluizione della tintura.


Testa e braccia
Vene provenienti dalla parte superiore del corpo
Arterie dirette alla parte superiore del corpo
Vena cava superiore
Aorta
Arteria polmonare
Vena polmonare
Ventricolo destro
Ventricolo sinistro
Vene epatiche
Arteria epatica
Vena cava inferiore
Fegato
Vena porta
Tubo digerente
Reni
Vene che drenano la parte inferiore del corpo
Gambe
Arterie dirette alla parte inferiore del corpo

Quest’ultima viene iniettata nell’atrio destro e fluisce attraverso il cuore nell’aorta. Una sonda inserita nell’aorta misura la concentrazione di tintura che lascia il cuore dopo uguali periodi di tempo nell’intervallo [0; T] finché la tintura non è più rilevabile.

La gettata cardiaca F è data da:

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$$

Dove A è la quantità di tintura iniettata,

c (t) è la concentrazione al tempo t ,

[0; T] è l’intervallo di tempo finché la tintura non è più rilevabile.

Numerose sono le applicazioni in fisica:

- Moti rettilinei

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt$$

- Lavoro di una forza

$$W_{AB} = \int_a^b F(x)\,dx$$