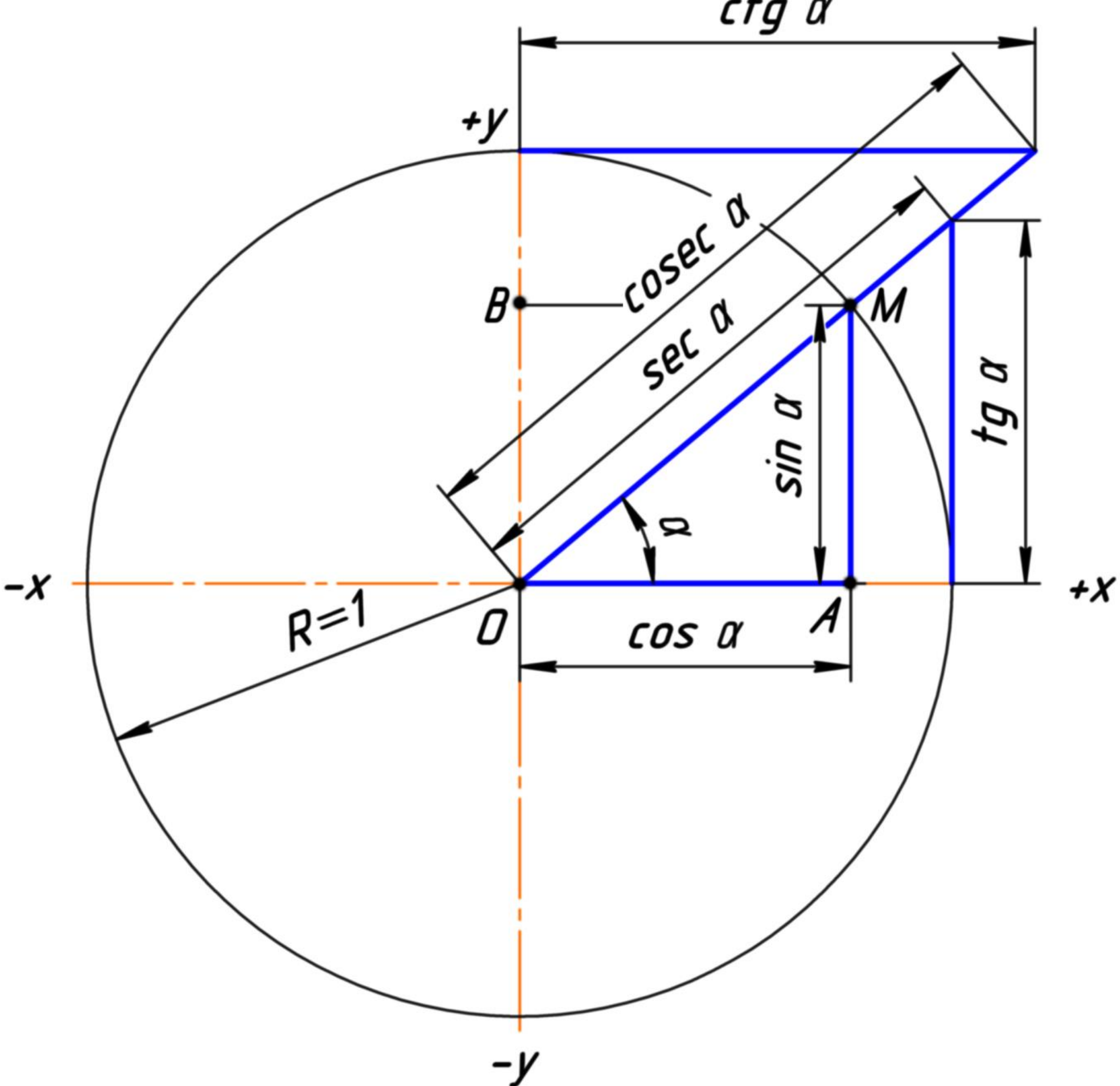
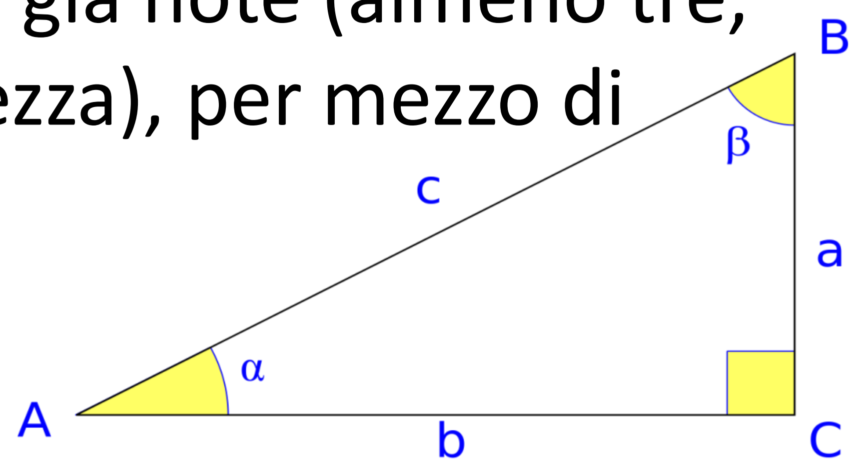
Trigonometria



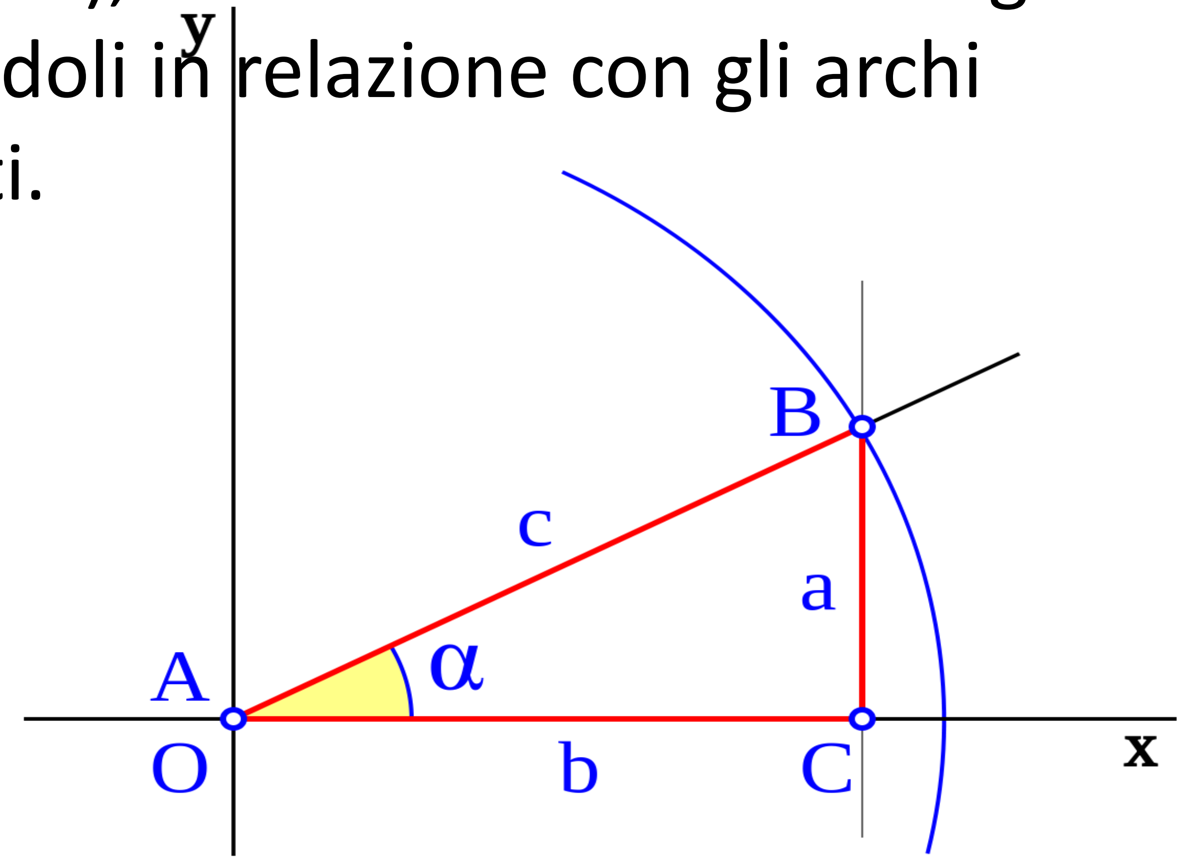
Dal greco *trígonon* τρίγωνον, triangolo e *métron* μέτρον, misura

Parte della matematica che studia i triangoli a partire dai loro angoli. Il compito principale della trigonometria consiste nel calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di
un triangolo (lati, angoli, mediane, etc.) partendo da altre misure già note (almeno tre, di cui almeno una lunghezza), per mezzo di speciali funzioni.



Goniometria

Dal greco γωνία' (Gonia: angolo) e μέτϿον (Metron: misura), studia la misurazione degli angoli mettendoli in relazione con gli archi corrispondenti.



Un po' di storia

La storia delle funzioni goniometriche si estende per circa 4000 anni. Vi sono delle prove che indicano che i babilonesi furono i primi ad usare (pur in forma ancora primitiva) delle funzioni trigonometriche, in base ad una tabella di numeri scritta su una tavola cuneiforme babilonese, Plimton 322 risalente a circa il 1900 a.C.che si può interpretare come una tavola di secanti.

Più tardi, le funzioni trigonometriche furono studiate da Ipparco di Nicea (180-125 a.C.), che tabulò le lunghezze degli archi di circonferenza (angolo α moltiplicato per il raggio r) insieme alla lunghezza delle corde sottese ($2r \sin(\alpha/2)$).

Nel II secolo Claudio Tolomeo dell'Egitto estese questo lavoro nel suo *Almagesto* , derivando formule di addizione/sottrazione equivalenti a $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$. Tolomeo ricavò l'equivalente della formula di bisezione

$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos\alpha)/2$

e stilò una tabella dei suoi risultati.

Né le tavole di Ipparco, né quelle di Tolomeo ci sono pervenute, nonostante le descrizioni di altri autori antichi lascino pochi dubbi sulla loro esistenza.

I successivi importanti sviluppi della trigonometria si ebbero in India. Il matematico e astronomo Aryabhata (476–550), nella sua opera *Aryabhata-Siddhanta*, definì per la prima volta il seno e il coseno che indicò con i termini

jya per il seno, *kojya* per il coseno.

Le opere indiane furono in seguito tradotte ed ampliate dai matematici musulmani.

Tutte queste opere sulla trigonometria erano interessate principalmente alle applicazioni all'astronomia.

Regiomontano fu forse il primo matematico in Europa che si occupò di trigonometria come disciplina matematica distinta, nel suo *De triangulis omnimodus* scritto nel 1464.

L'*Opus palatinum de triangulis* di Rheticus, uno studente di Niccolò Copernico, fu probabilmente la prima a definire le funzioni trigonometriche direttamente in termini di triangoli rettangoli piuttosto che di cerchi; essa conteneva anche tavole per tutte le sei funzioni

trigonometriche; quest'opera fu completata dallostudente di Rheticus Valentin Otho,
nel 1596.

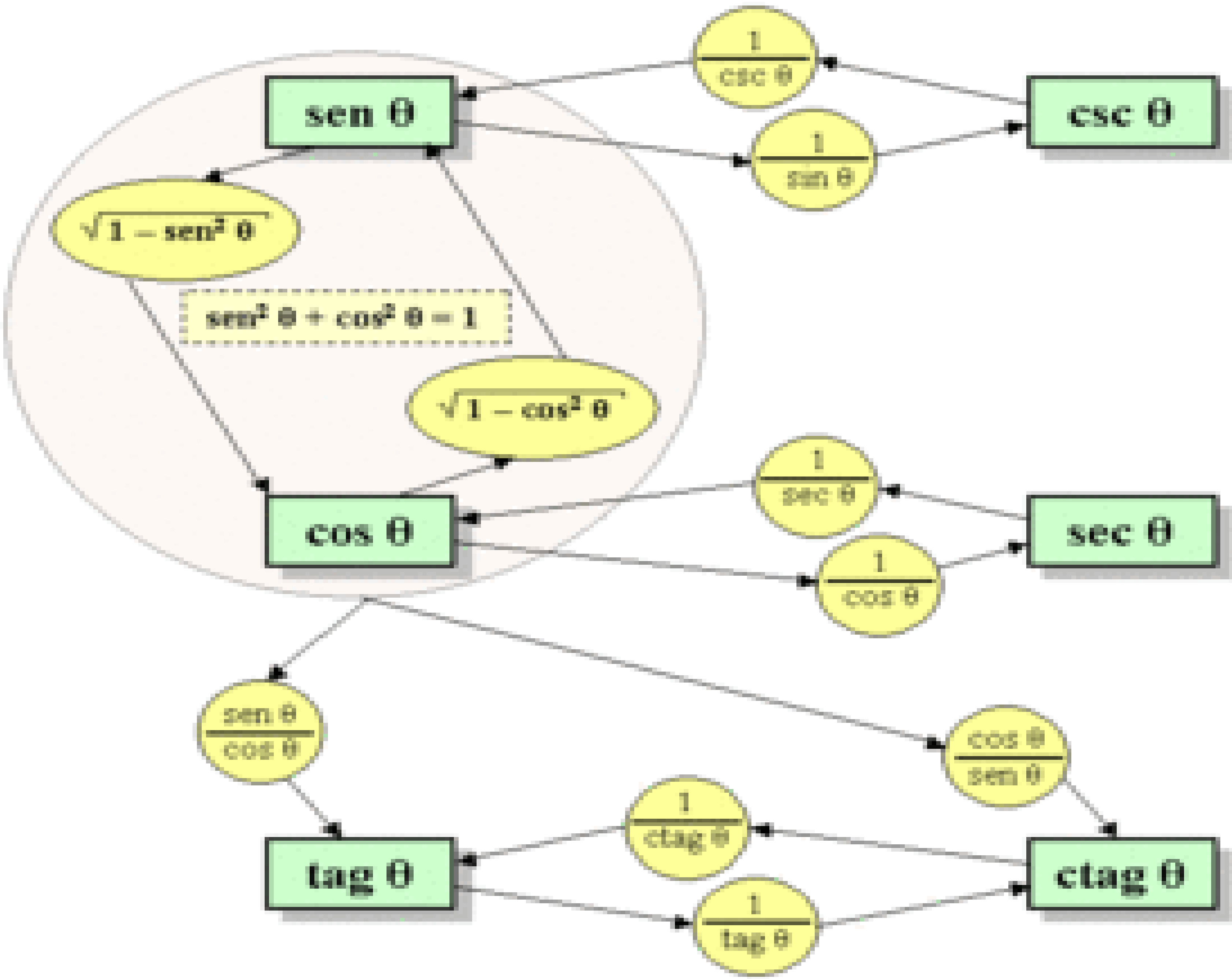
Nel XVI secolo fiorirono le invenzioni di strumenti atti a facilitare i calcoli trigonometrici,
tra questi la squadra mobile messa a punto dal veneziano Ottavio Fabri.
Lo strumento consentiva di misurare e riportare sul disegno con grande facilità gli angoli ottusi.

L'*Introductio in analysin infinitorum* (1748) di Leonardo Eulero ebbe il merito di stabilire la moderna trattazione analitica delle funzioni trigonometriche in Europa.

Le funzioni goniometriche

- Seno
- Coseno
- Tangente
- Cotangente
- Secante
- Cosecante

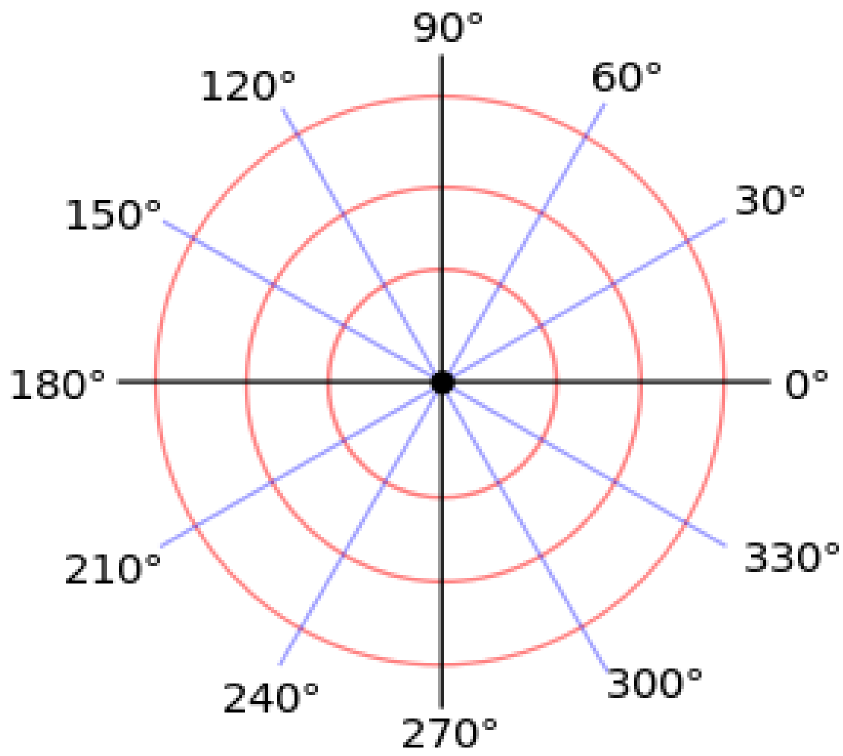
	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\cot\alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\csc\alpha}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\csc\alpha$	$\pm\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\pm\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$	$\sec\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\pm\sqrt{\csc^2\alpha-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\cot\alpha$



sen θ
csc θ
$\frac{1}{\csc \theta}$
$\frac{1}{\sin \theta}$
$\sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$
$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$
cos θ
sec θ
$\frac{1}{\sec \theta}$
$\frac{1}{\cos \theta}$
$\frac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta}$
$\frac{\cos \theta}{\text{sen}\, \theta}$
tag θ
ctag θ
$\frac{1}{\text{ctag}\, \theta}$
$\frac{1}{\text{tag}\, \theta}$

Circonferenza goniometrica

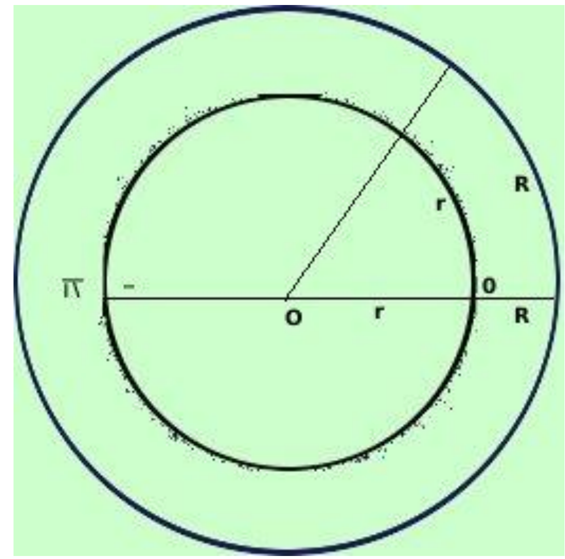
Circonferenza con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio unitario.



Come vengono misurati gli Angoli

Radiante: è definito come *la misura dell'angolo sotteso da un arco lungo quanto il raggio* r *della circonferenza cui*

ci si sta riferendo.



π 1 rad = 57° 17’ 45’’gradi

Il radiante è un numero puro.

Sappiamo che la lunghezza di una circonferenza è data da $2\pi r$, quindi in una circonferenza ci stanno 2π raggi, da cui un *angolo giro è pari a* 2π *radianti*.

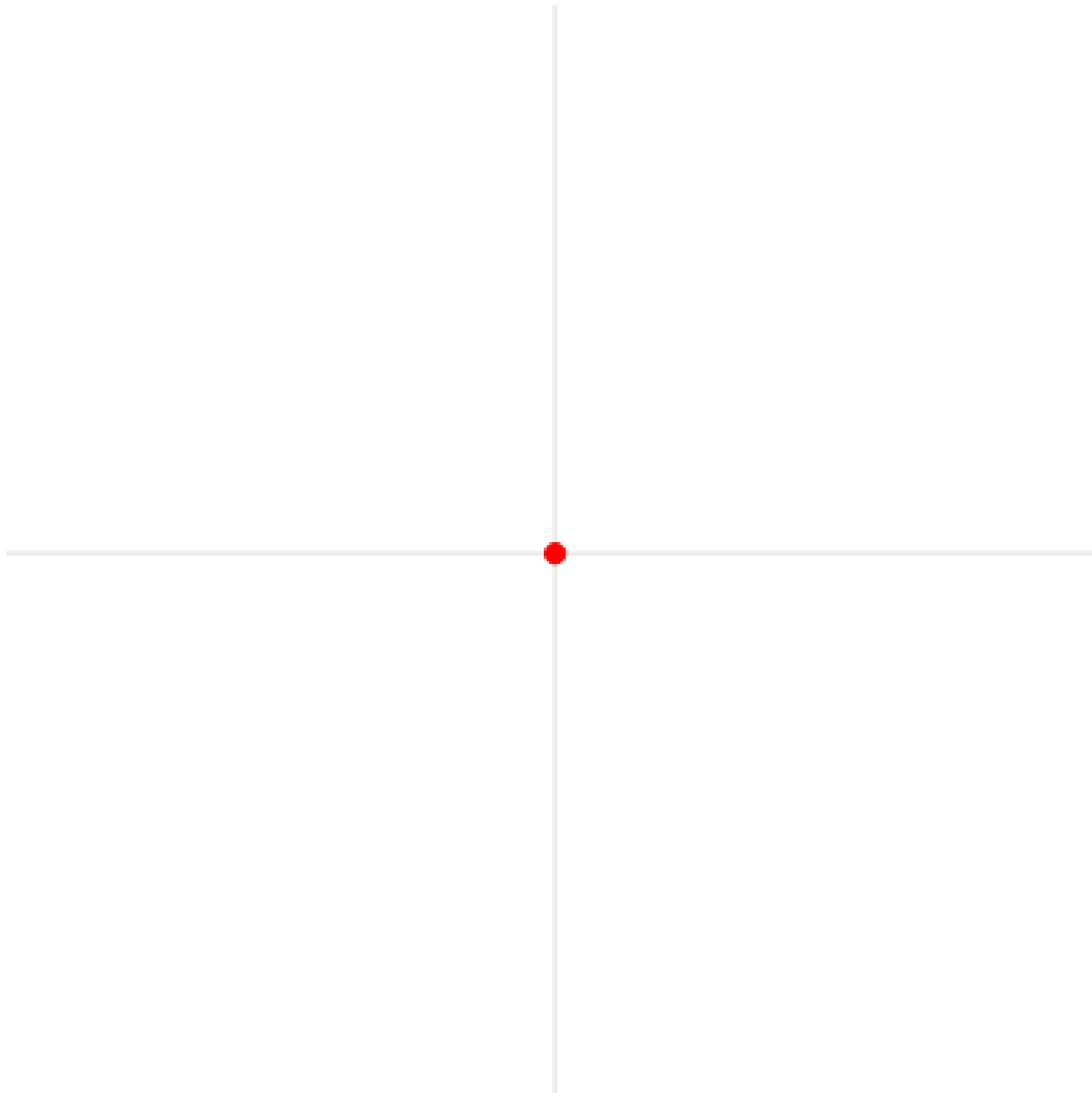


Tabella di conversione

gradi	radianti
0	0
15	π /12
30	π /6
45	π /4
60	π /3
90	π /2
120	2/3 π
135	3/4 π
150	5/6 π

gradi	radianti
180	π
210	7/6 π
225	5/4 π
240	4/3 π
270	3/2 π
300	5/3 π
315	7/4 π
330	11/6 π
360	2π

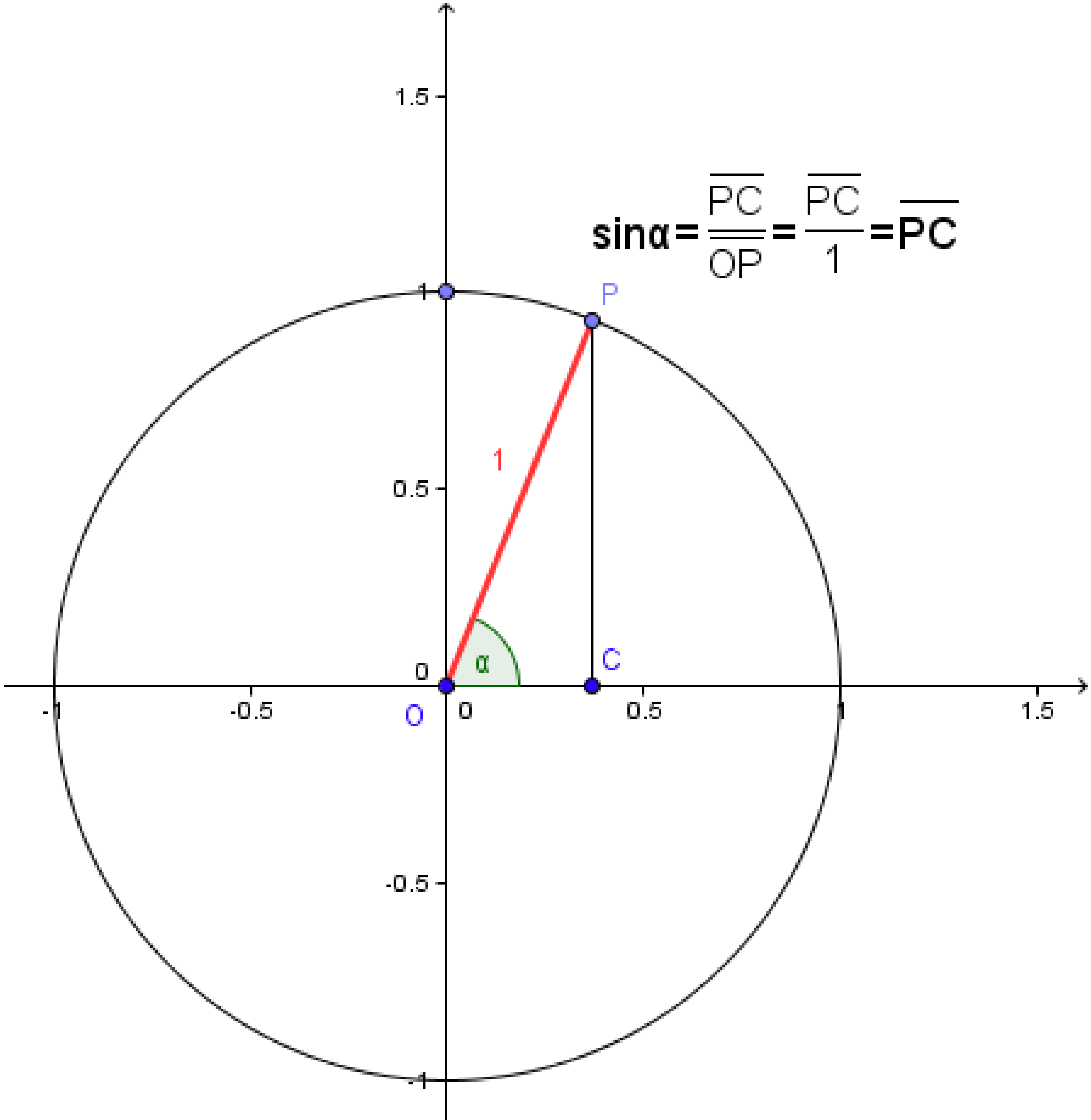
- La misura del radiante consente di avere formule trigonometriche molto più semplici di quelle che si avrebbero adottando i gradi sessagesimali

Seno

La parola moderna *seno* è derivata dal termine latino *sinus*, che significa "baia" o "insenatura", a causa di un errore di traduzione dall'arabo della parola sanscrita *jiva*.

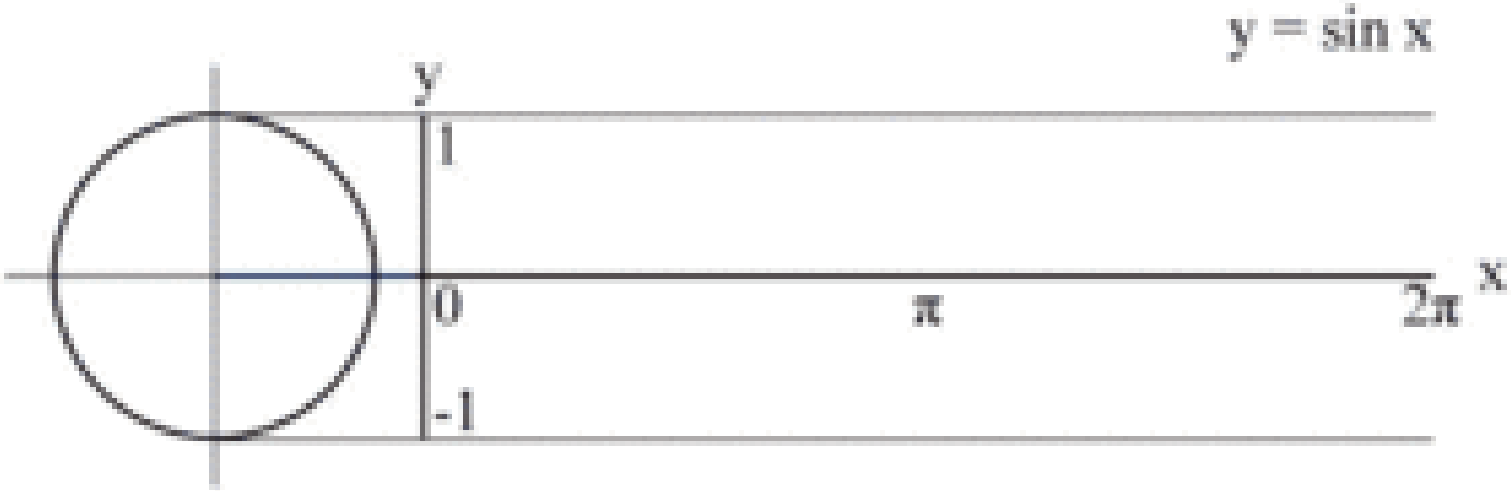
Definizione 1: rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Definizione 2: ordinata del punto di intersezione tra il raggio vettore che individua l'angolo e la circonferenza goniometrica



$$\sin\alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PC}}{1} = \overline{\mathbf{PC}}$$

Sinusoide



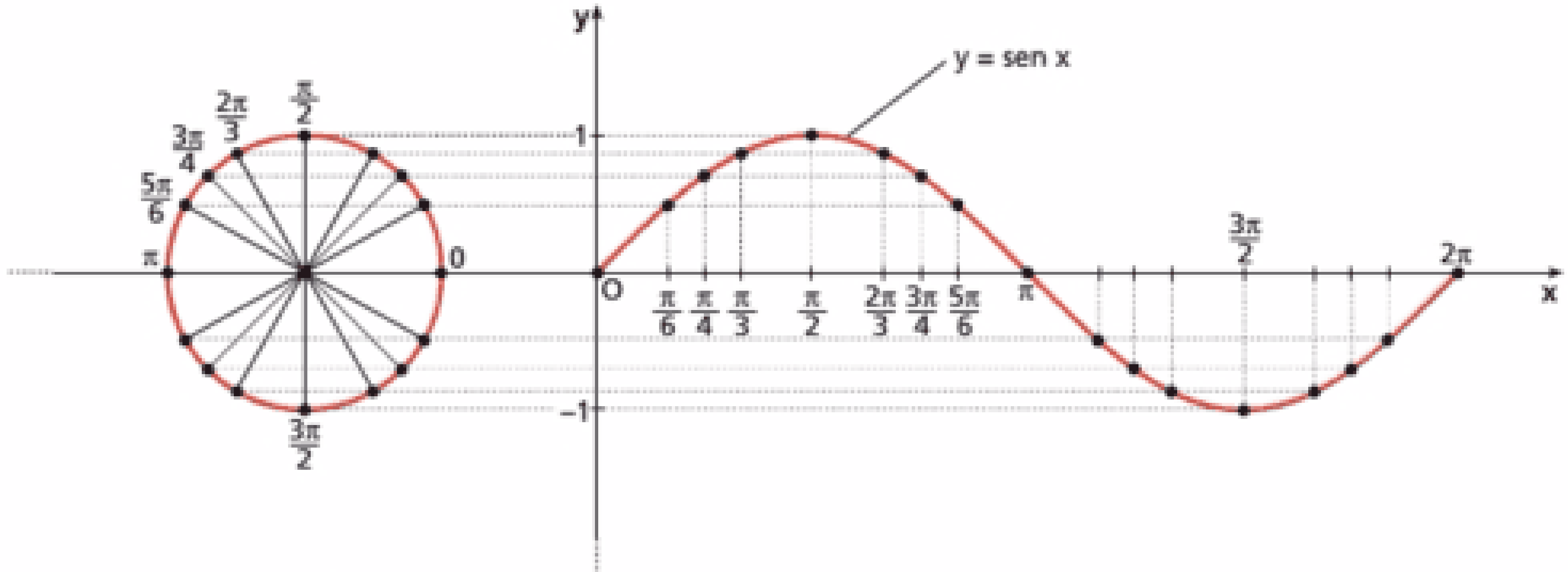


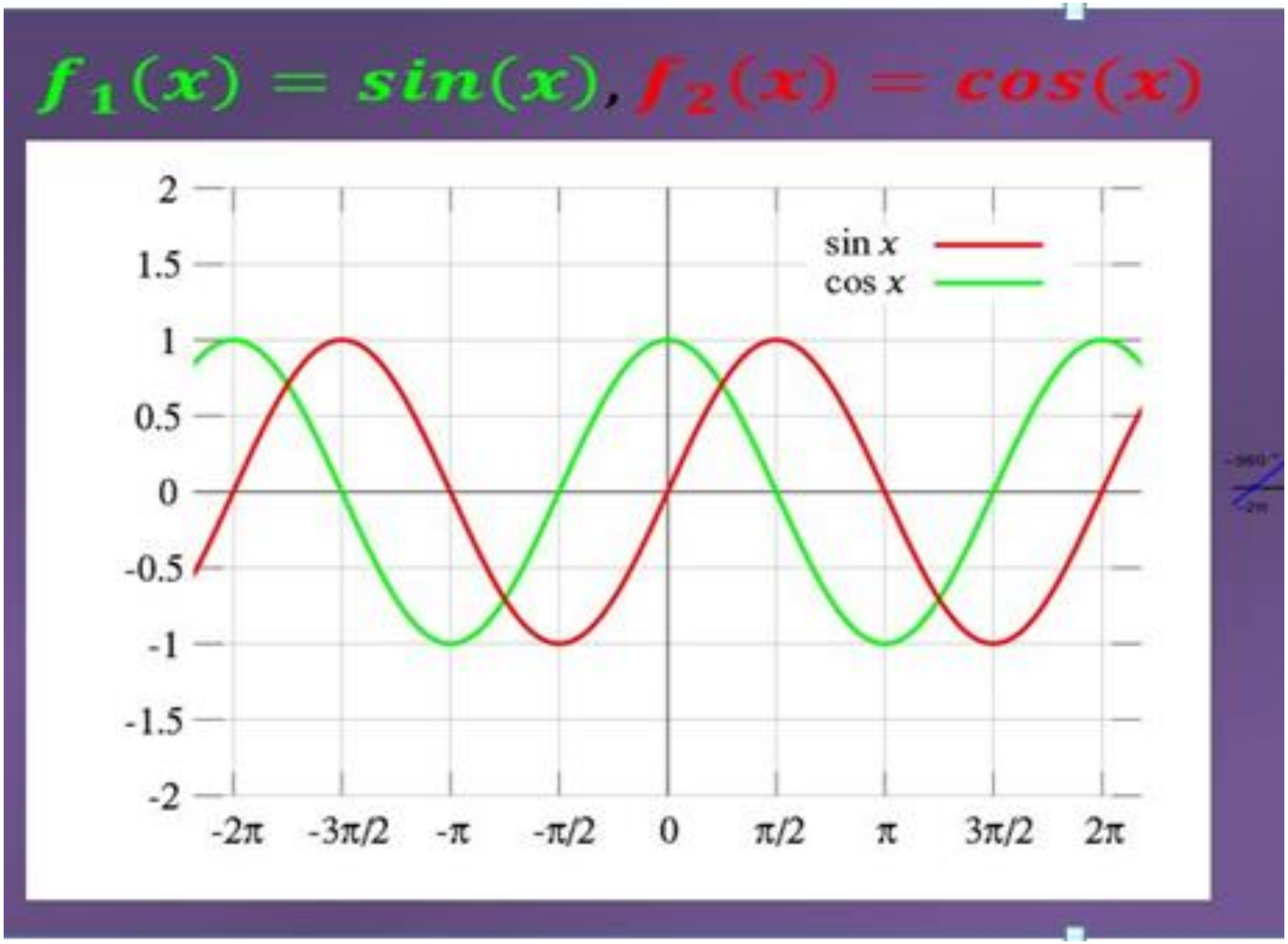
Grafico di $y = \text{sen}\ x$ in $[0; 2\pi]$.

Caratteristiche

- Dominio: R
- Codominio: $[-1; +1]$
- Funzione periodica di periodo 2π
- Suriettiva
- Crescente 1 e 4 quadrante
- Decrescente 2 e 3 quadrante
- Positiva 1 e 2 quadrante
- Negativa 3 e 4 quadrante
- Dispari

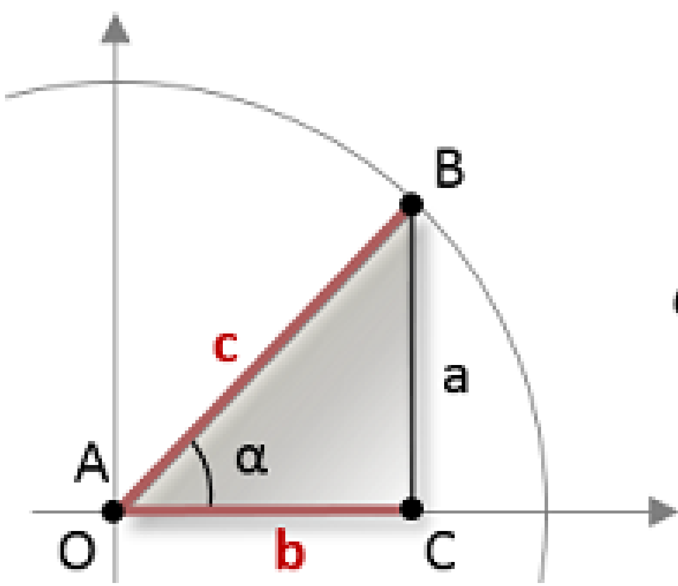
Coseno

Co-sinus, quindi funzione complementare del seno.



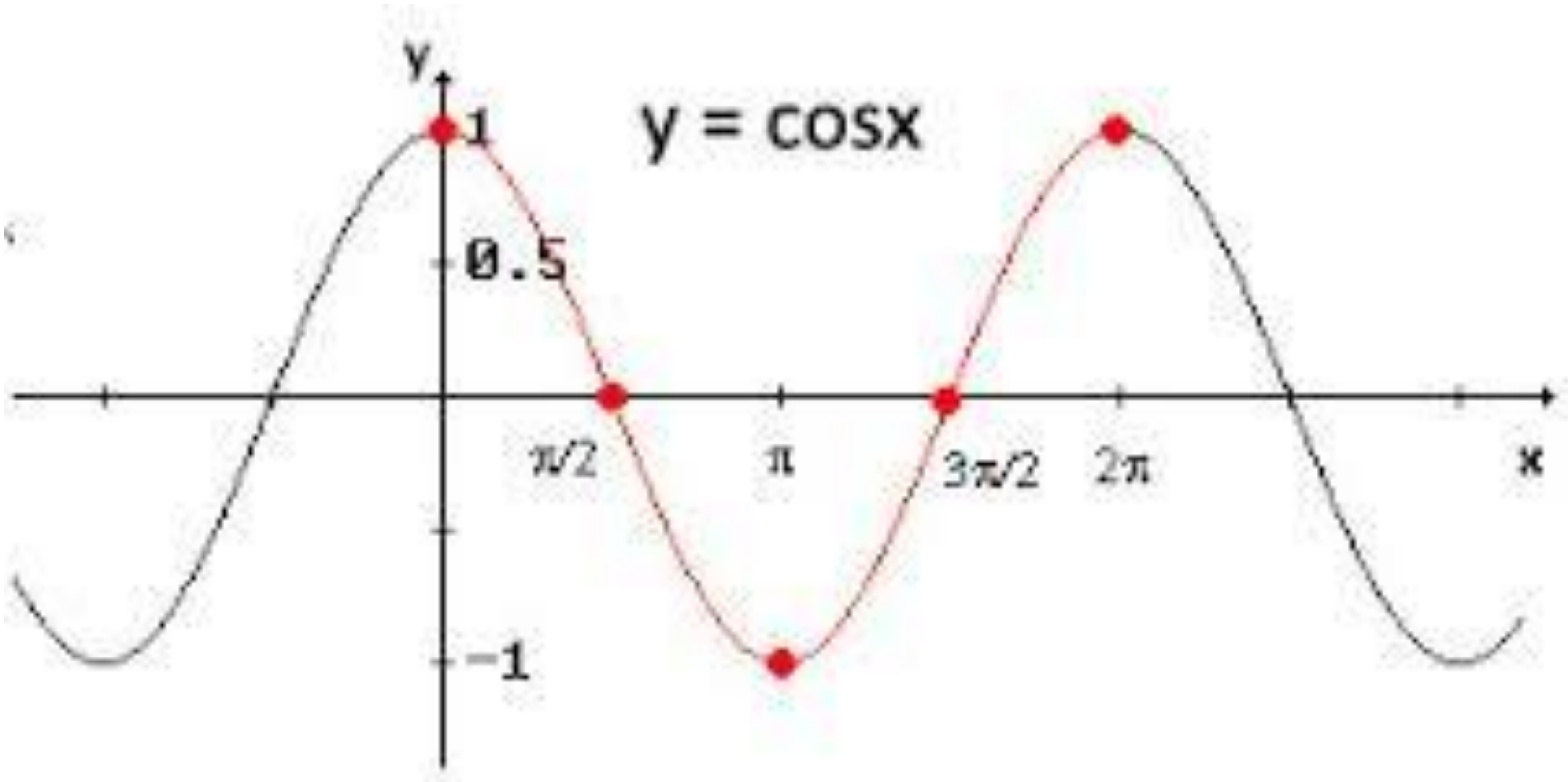
Definizioni

- 1: rapporto tra il cateto adiacente all’angolo e l’ipotenusa di un triangolo rettangolo.
- Ascissa del punto di intersezione tra il raggio vettore che individua l’angolo e la circonferenza goniometrica.



$$\boldsymbol{cos} \propto = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Cosinusoide

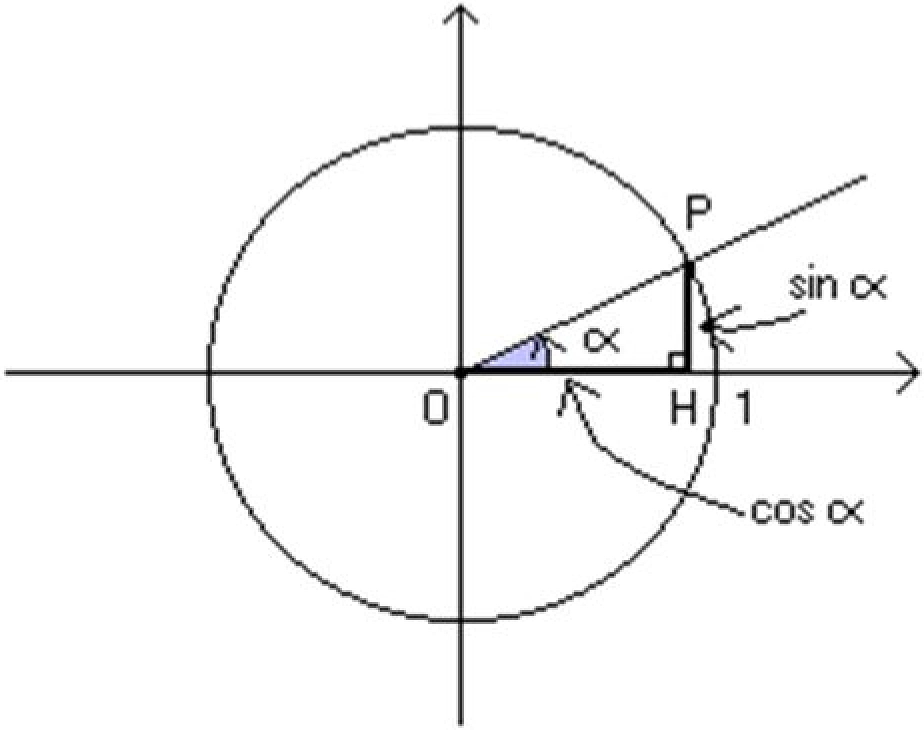


Caratteristiche

- Dominio: R
- Codominio: $[-1; +1]$
- Funzione periodica di periodo 2π
- Suriettiva
- Decrescente 1 e 2 quadrante
- Crescente 3 e 4 quadrante
- Positiva 1 e 4 quadrante
- Negativa 2 e 3 quadrante
- Pari

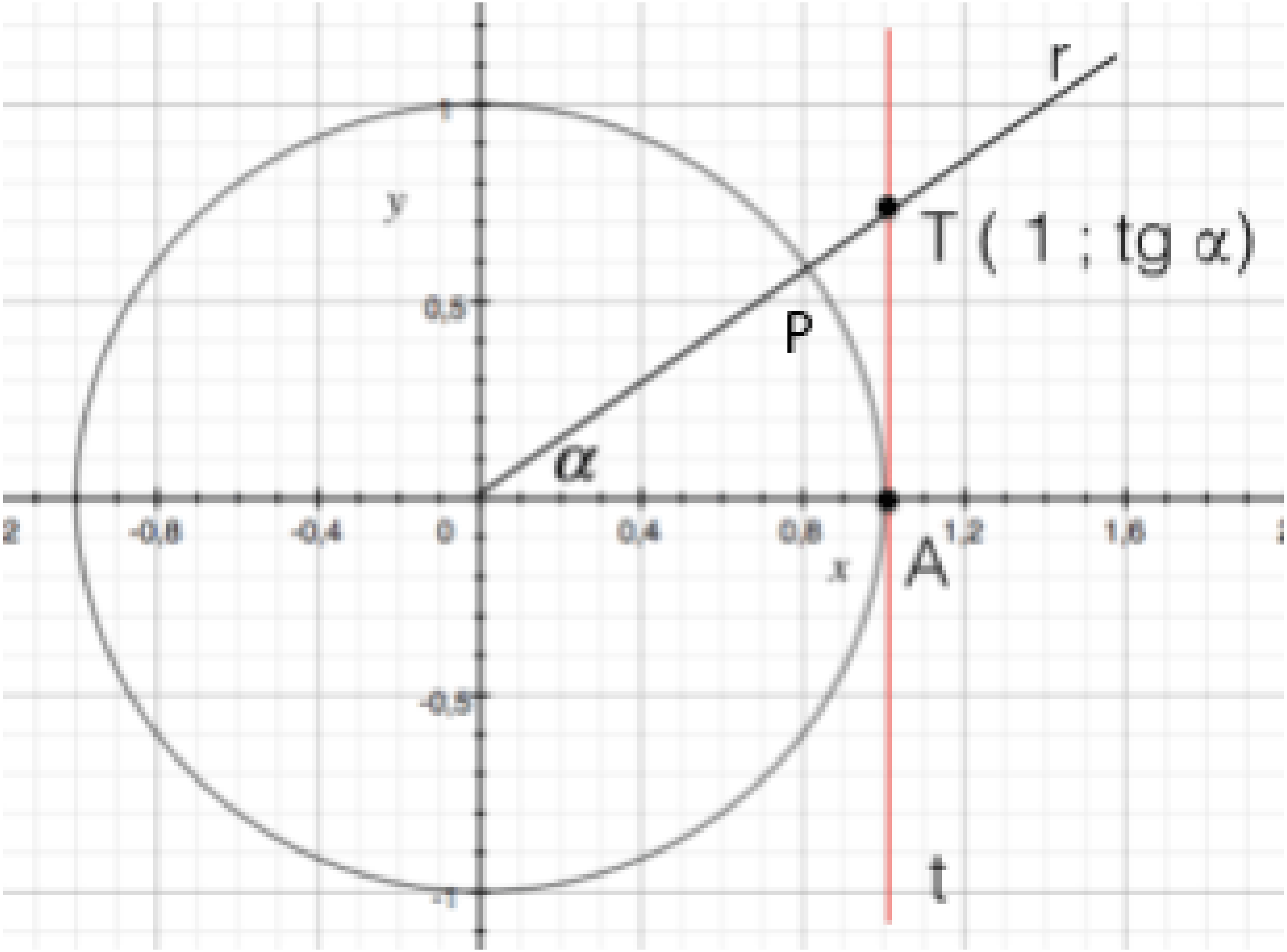
LA PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE

$$\cos^2 \alpha + \mathrm{sen}^2 \alpha = 1$$



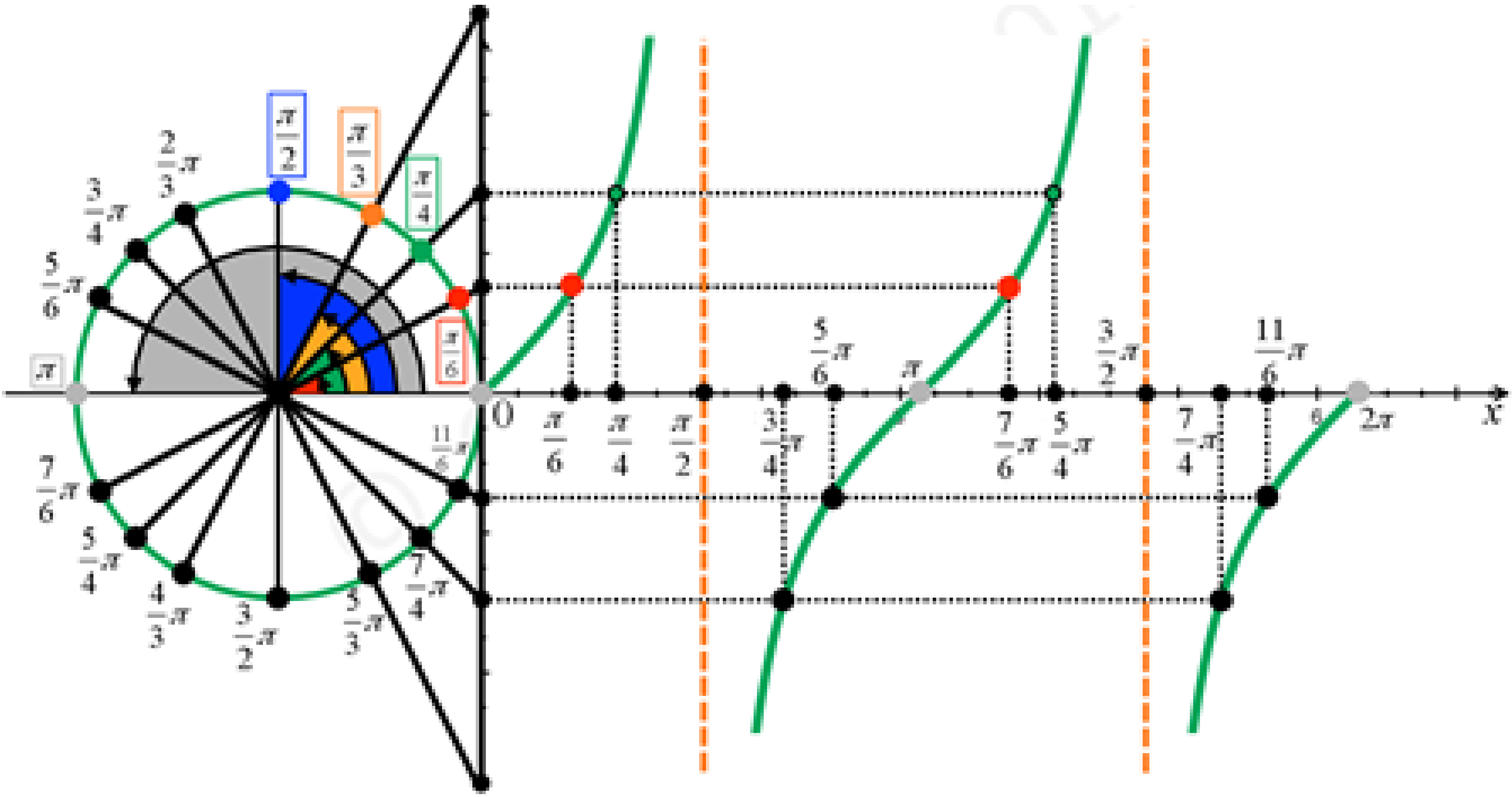
Tangente

- Definizione 1: rapporto tra il cateto opposto all’angolo acuto e il cateto adiacente di un triangolo rettangolo.
- Definizione 2: ordinata del punto di intersezione tra il prolungamento del raggio vettore che individua l’angolo e la tangente geometrica alla circonferenza condotto per il punto (1;0)



r
T (1 ; tg α)
P
α
A
t
y
x
1
0,5
-0,5
-1
-0,8
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
1,6

Tangentoide



Caratteristiche

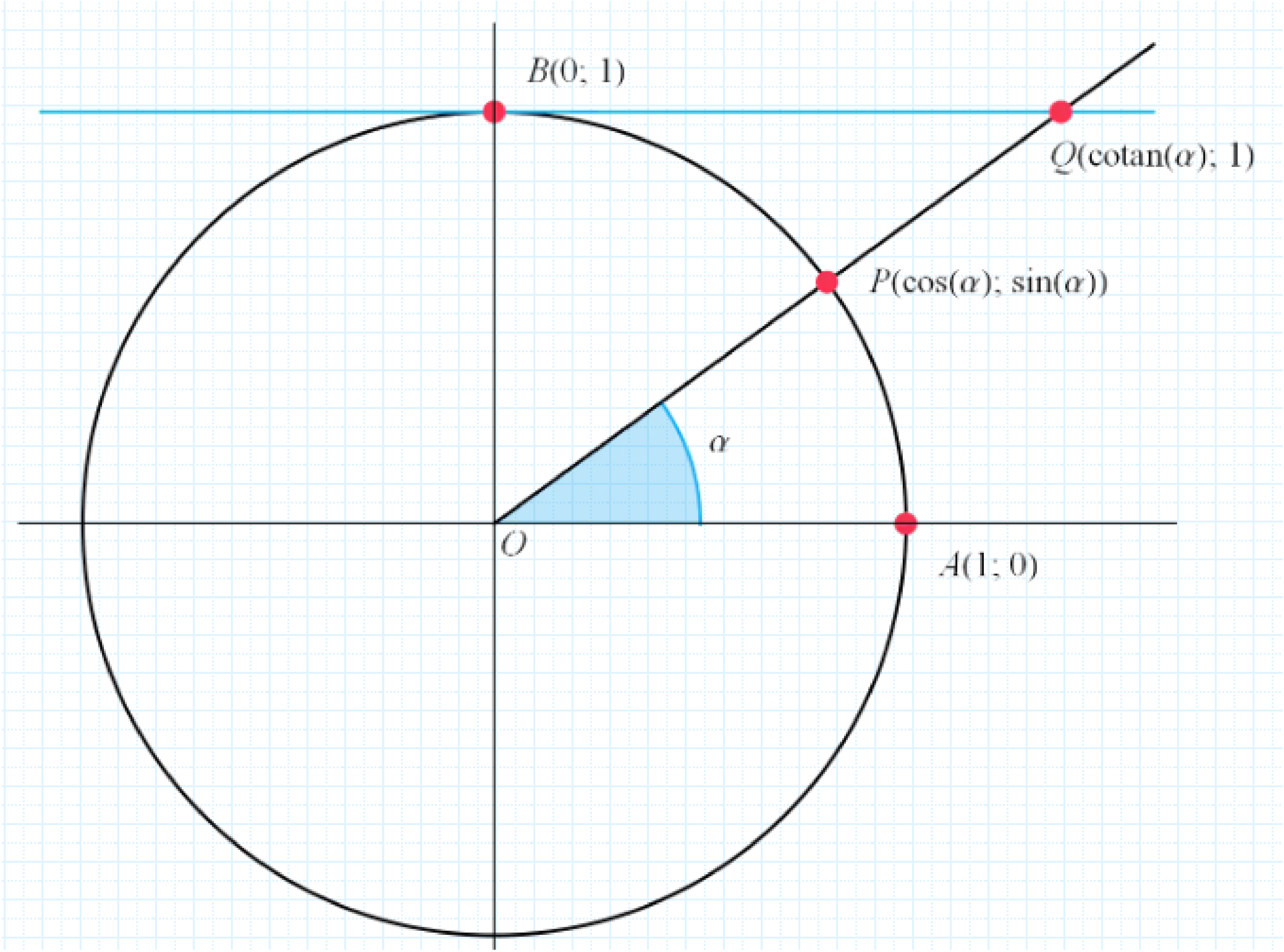
- Dominio: R- $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
- Codominio: R
- Funzione periodica di periodo π
- Suriettiva in generale, ma biunivoca in un periodo
- Sempre crescente
- Positiva 1 e 3 quadrante
- Negativa 2 e 4 quadrante
- Dispari
- Asintoti verticali in x= $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Cotangente

Complementare della tangente.

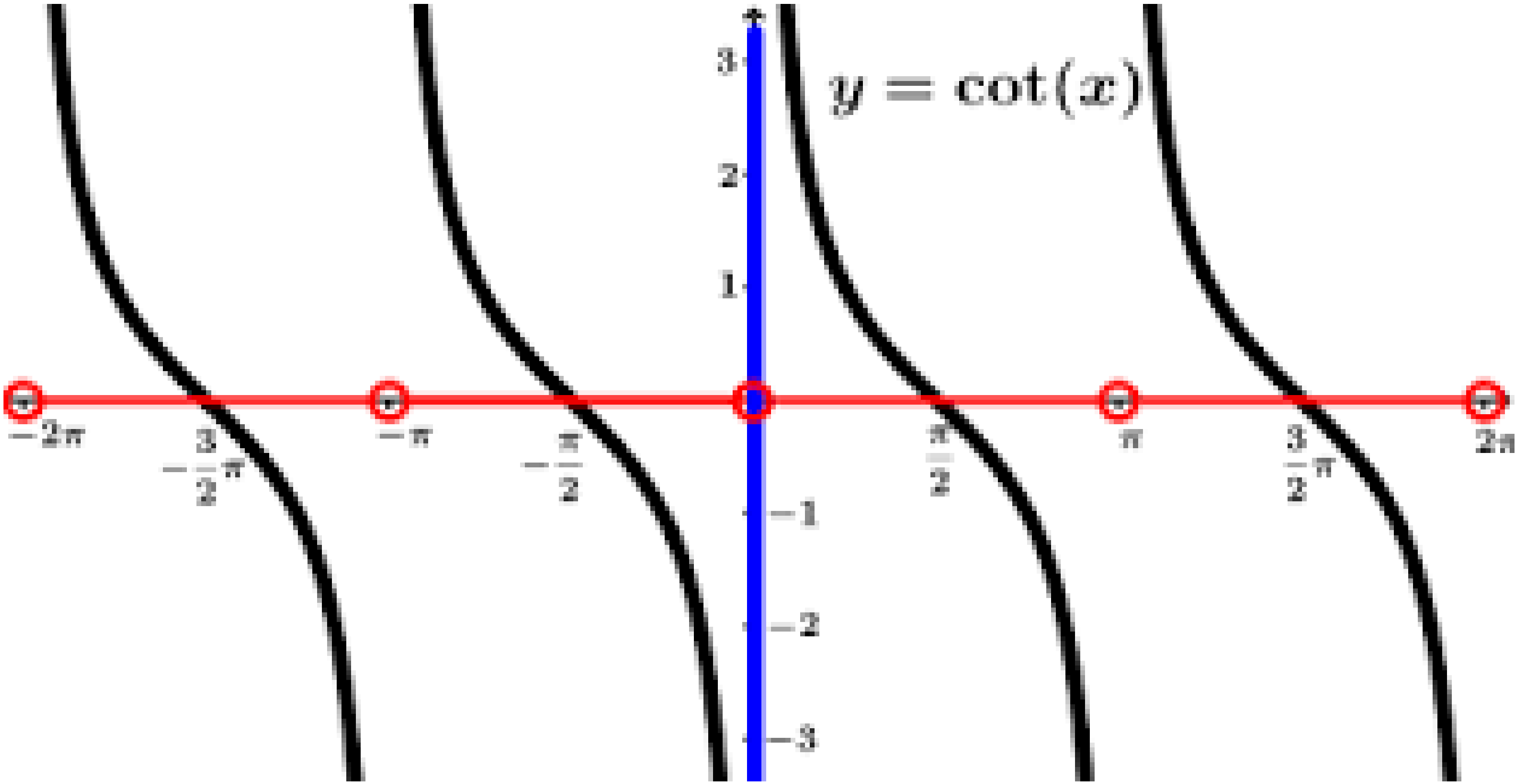
Definizione 1: rapporto tra il cateto adiacente all'angolo acuto di un triangolo rettangolo e il cateto opposto.

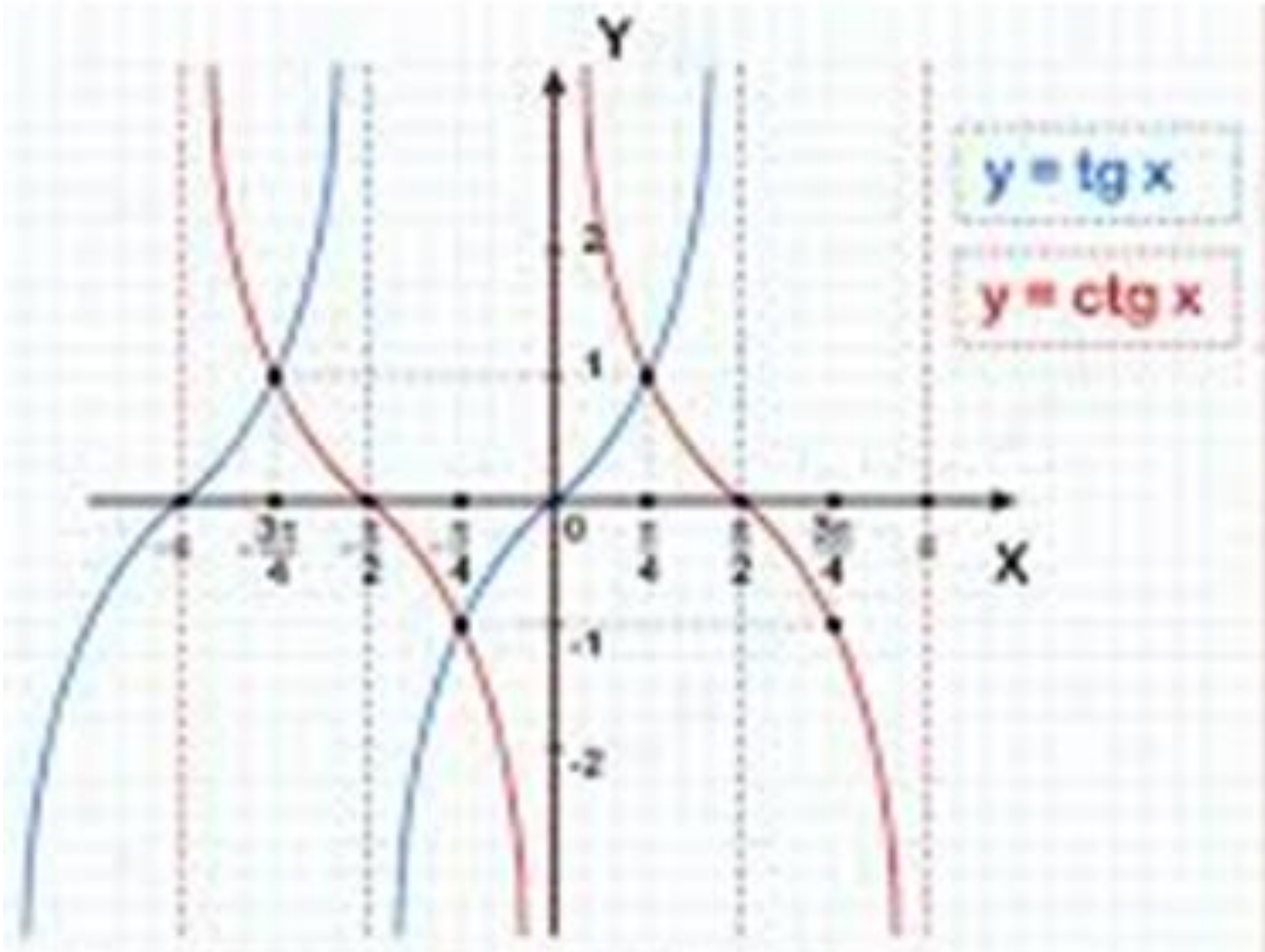
Definizione 2: ascissa del punto di intersezione tra il prolungamento del raggio vettore che individua l'angolo e la tangente geometrica alla circonferenza condotta nel punto (0; 1)



$B(0; 1)$
$Q(\text{cotan}(\alpha); 1)$
$P(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$
α
O
$A(1; 0)$

Cotangentoide




Y
X
y = tg x
y = ctg x
2
1
-1
-2
0

Caratteristiche

- Dominio: R- $\{k\pi\}$
- Codominio: R
- Funzione periodica di periodo π
- Suriettiva in generale, ma biunivoca in un periodo
- Sempre decrescente
- Positiva 1 e 3 quadrante
- Negativa 2 e 4 quadrante
- Dispari
- Asintoti verticali in x= $k\pi$

2 e 3 relazione fondamentale

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Secante e cosecante

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

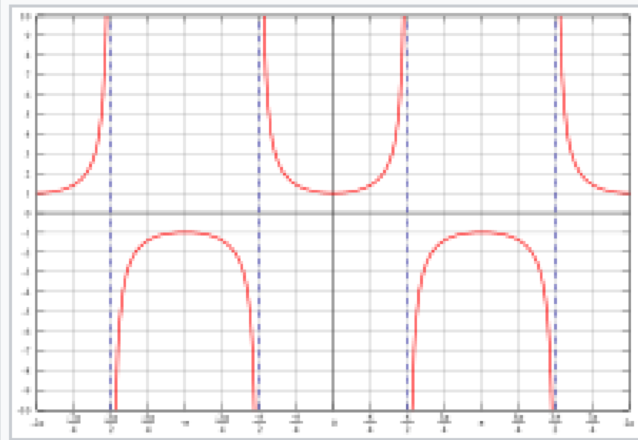
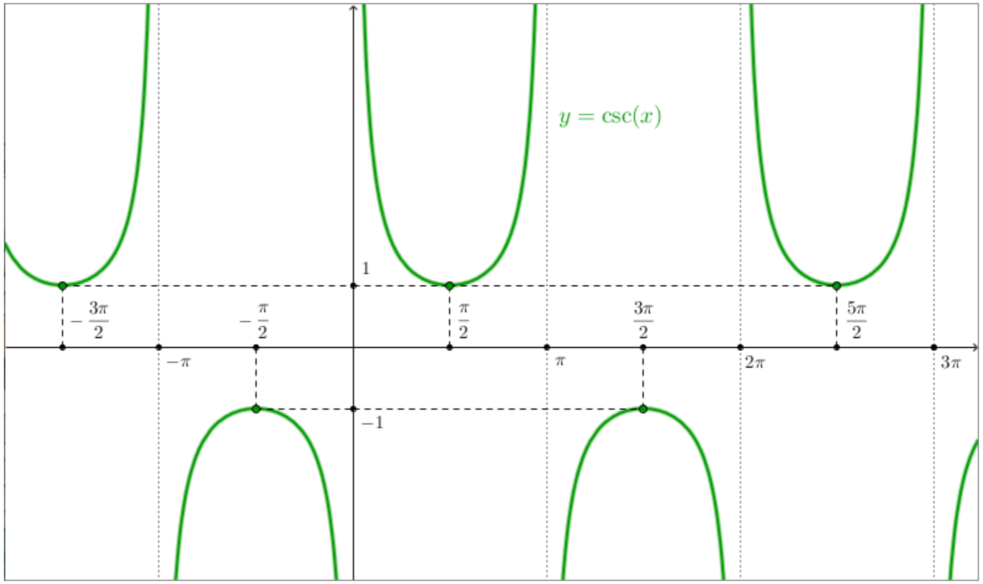
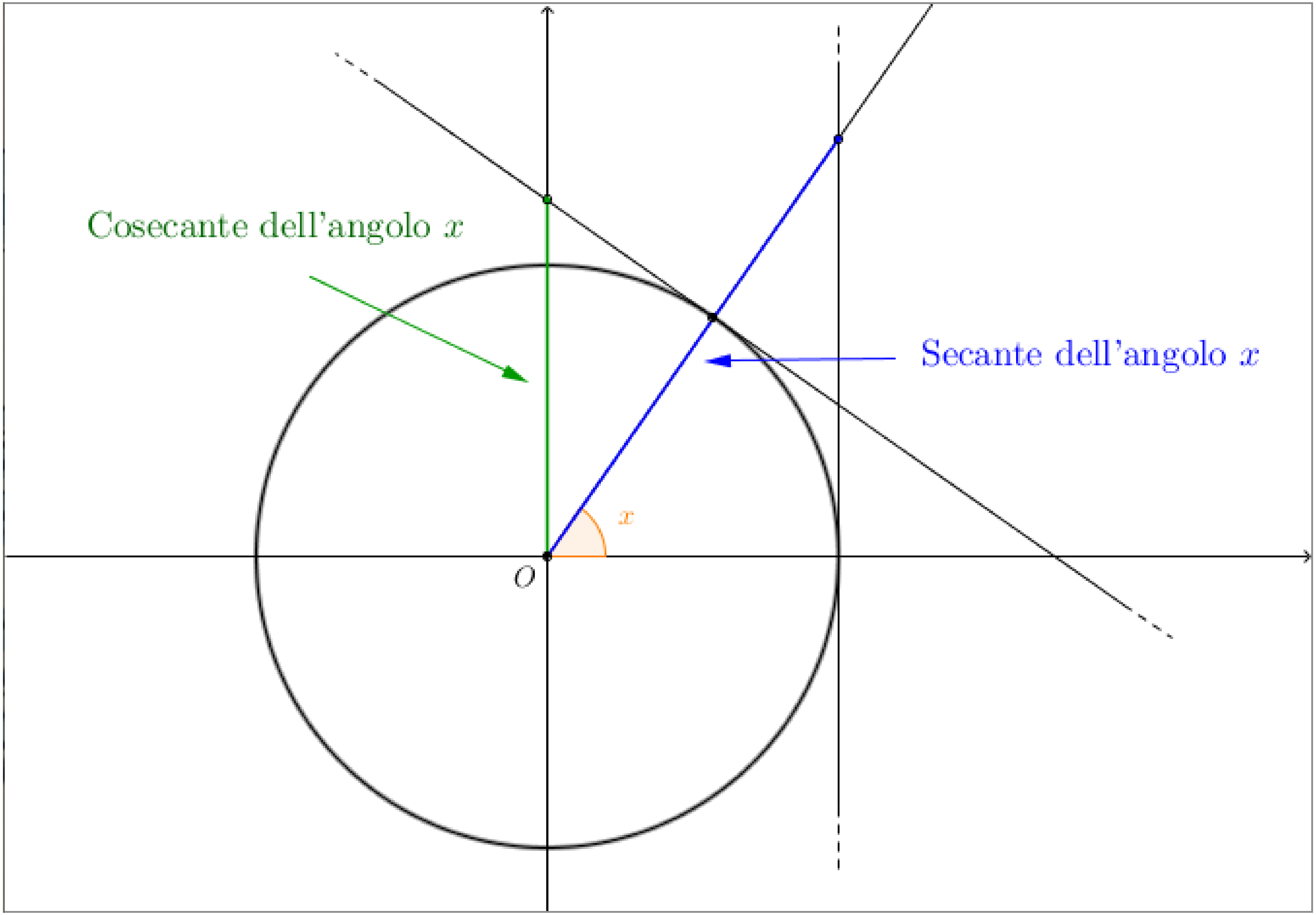


Grafico della funzione secante

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}$$




Cosecante dell'angolo x
Secante dell'angolo x
x
O

Applicazioni della trigonometria

- Alla geometria:

Area del triangolo

Area del parallelogramma

Formula di Erone

Raggio circonferenza inscritta

Raggio circonferenza circoscritta

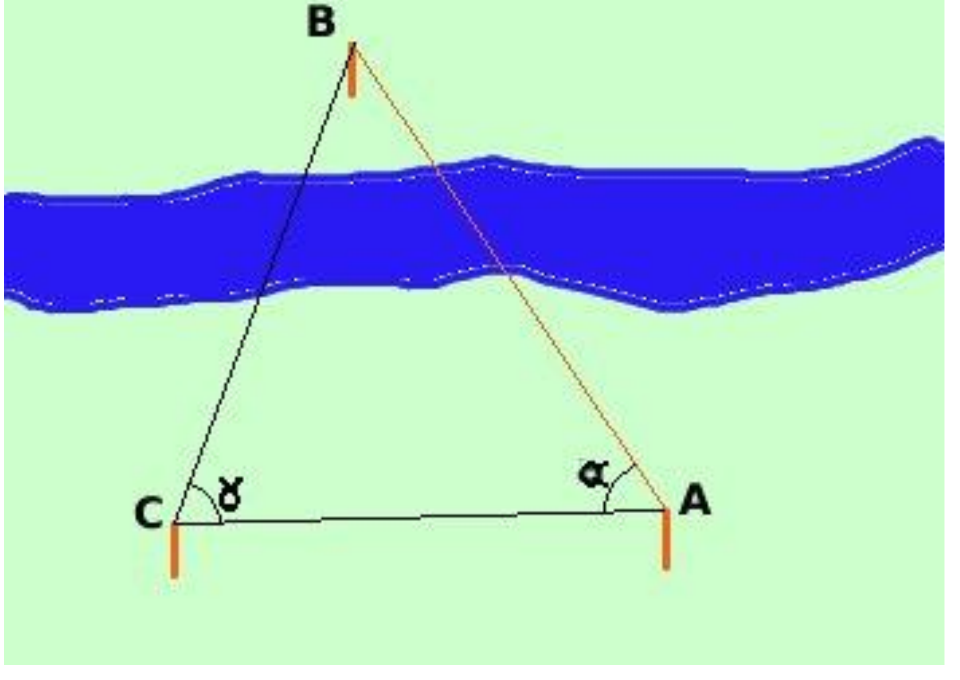
Mediane di un triangolo

Bisettrici di un triangolo

Area di un quadrilatero qualunque

Applicazioni alla topografia ed alla geodesia

Supponiamo di voler calcolare la distanza fra due punti A e B: io mi trovo in A ma non posso raggiungere B perché è al di là del fiume.



Posso spostarmi in un punto C e calcolare la distanza **AC** ed inoltre gli angoli **ACB** e **CAB con il teodolite.**

Abbiamo quindi il triangolo **ABC** in cui conosciamo due angoli ed il lato compreso, quindi per risolvere il triangolo possiamo calcolare il terzo angolo ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Successivamente applico il teorema dei seni.

Teodolite

Apparecchio non elettronico costituito da due **cerchi graduati**, di cui uno si trova in posizione orizzontale e l'altro in **posizione verticale**. Inoltre, attorno ad un **perno passante** per il centro del cerchio orizzontale, può ruotare liberamente un telescopio, sia sul **piano del cerchio orizzontale**, sia sopra al **piano del cerchio verticale**.

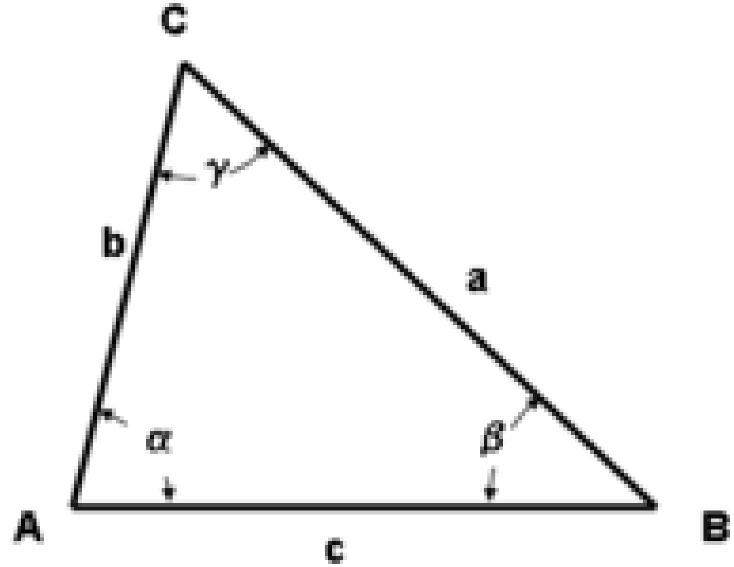
Il telescopio ha una vista sulla parte superiore che viene utilizzata per allineare il bersaglio.

Lo strumento ha una manopola di messa a fuoco che viene utilizzata per rendere l'oggetto chiaro.

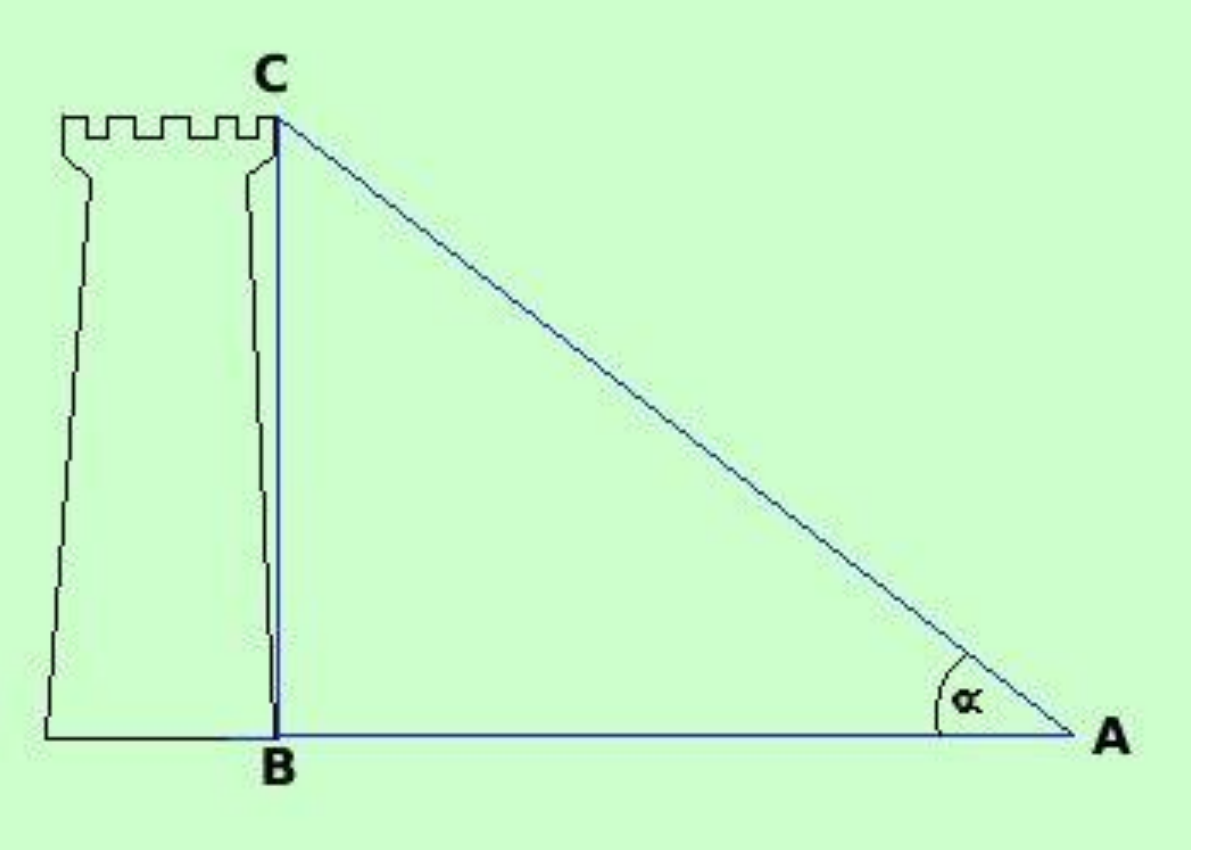
Il telescopio contiene un oculare che l'utente guarda attraverso per trovare il bersaglio che viene avvistato.

Teorema dei seni

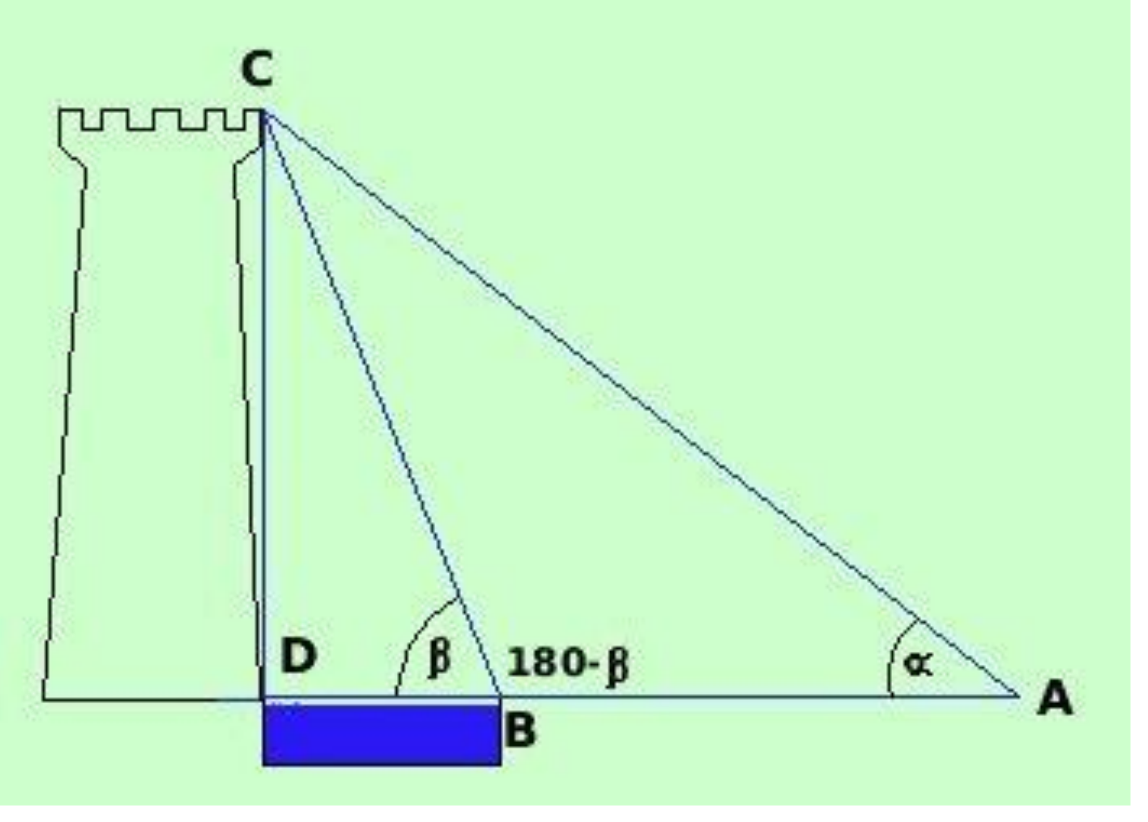
In un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante e corrisponde al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.



- Altezza di una torre.
  Piede della torre sul piano dell'osservatore ed accessibile



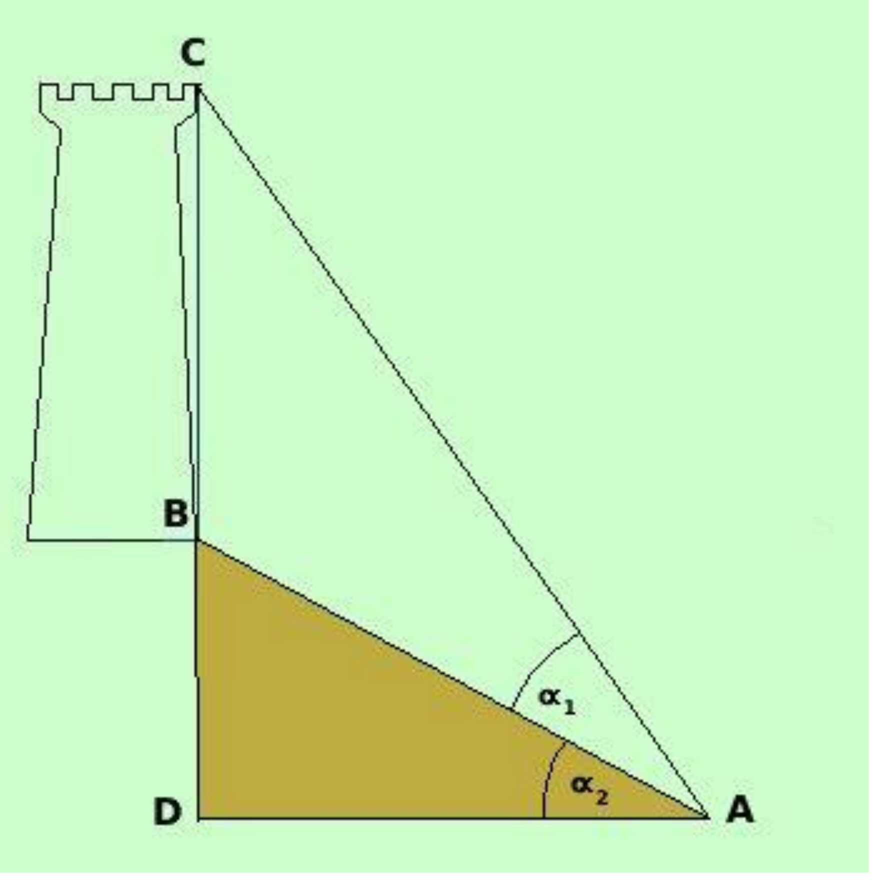
Altezza di una torre.
Piede della torre sul piano dell'osservatore e non accessibile



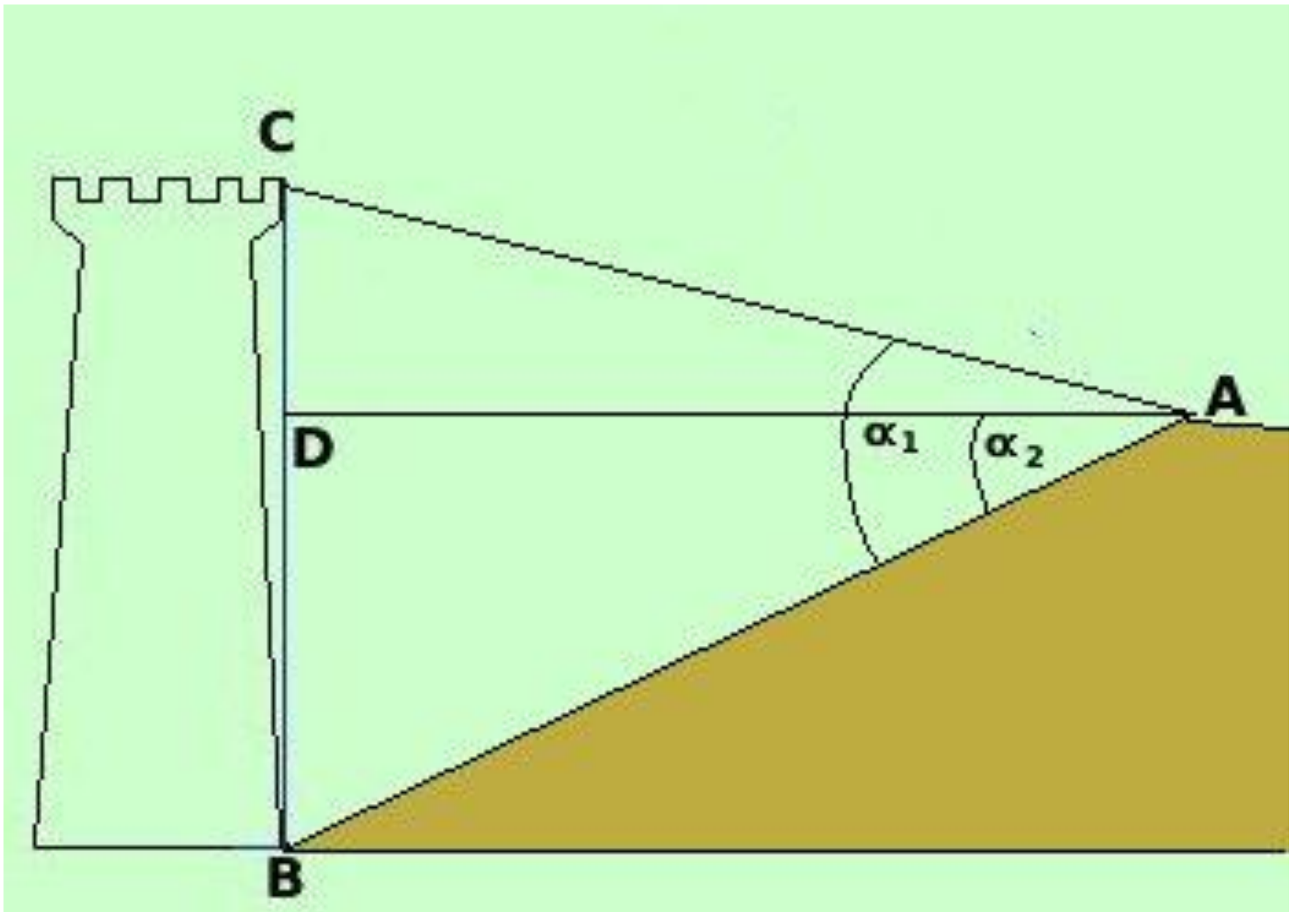
Altezza di una torre.

Piede della torre accessibile ma non sul piano dell'osservatore

-) la base della torre è più alta del piano dell'osservatore

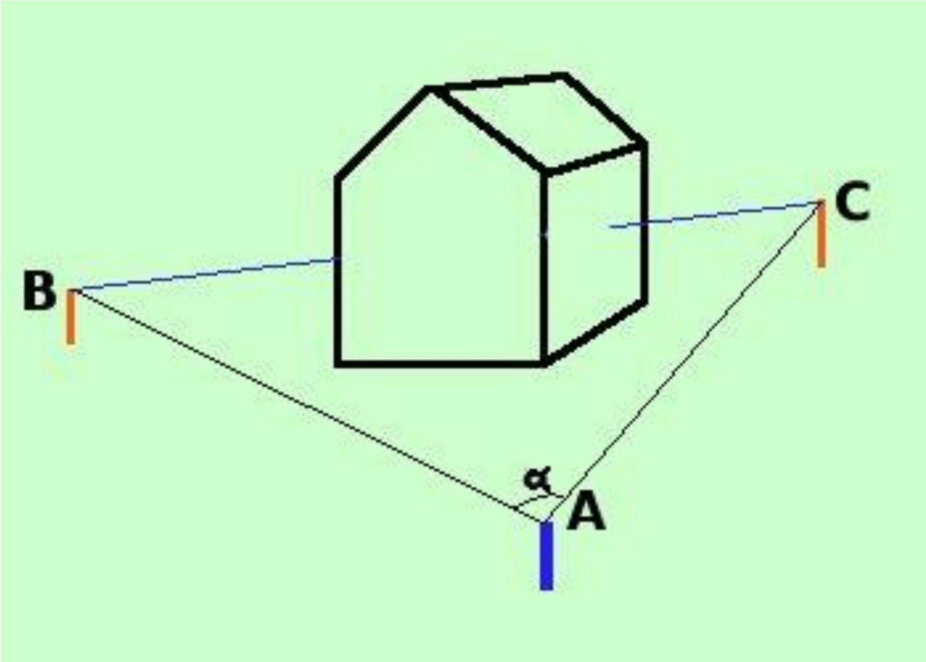


la base della torre è più alta del piano dell'osservatore



Distanza fra due punti accessibili ma non visibili tra loro

Posso applicare il teorema di Carnot dopo aver trovato AB e AC



Teorema di Carnot o del coseno o teorema di Pitagora generalizzato

In un triangolo qualsiasi il quadrato della misura di un lato è dato dalla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso.