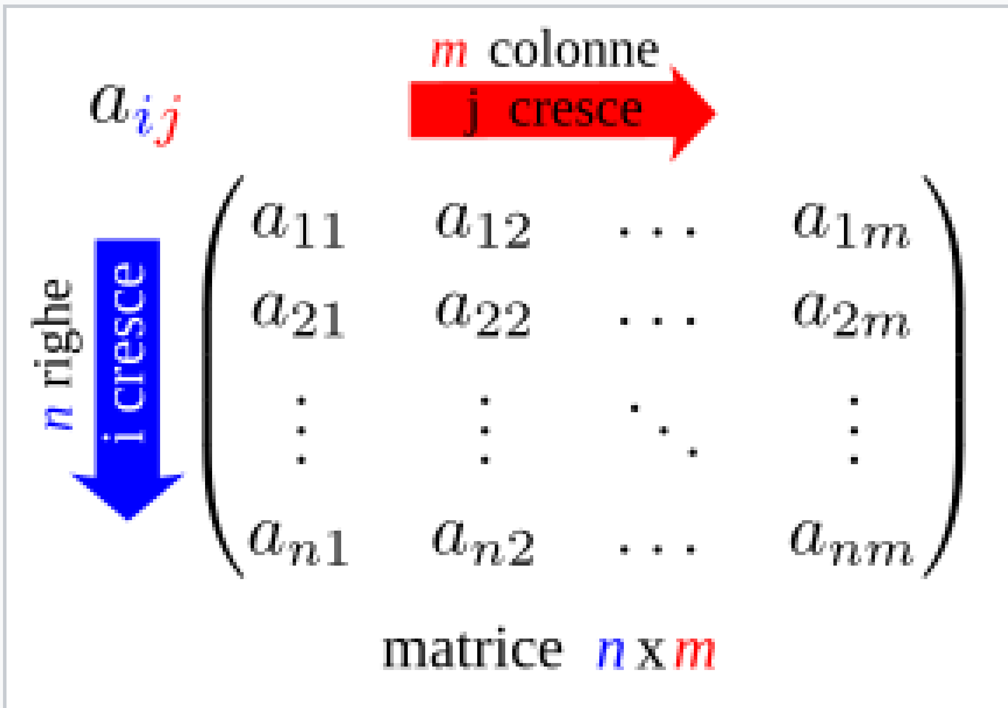
Matrici


URGENTE
NON URGENTE
IMPORTANTE
1
PRESSIONE
- Azione Immediata
- Non puoi delegare
- Progetti in scadenza
- Problemi pressanti che non ammettono proroghe
2
PIANIFICAZIONE
- Progetti a medio/lungo termine
- Attività di formazione personale, sportiva e professionale
- Dedicare tempo alle persone che ti stanno a cuore
IMPORTANTE
NON IMPORTANTE
3
INSODDISFAZIONE
- Imprevisti
- Attività che ci distolgono dalle cose importanti ma non puoi rimandare.
- Puoi delegare
4
DISTRAZIONE
- Attività superficiali e banali
- Attività piacevoli e tentatrici che tendono ad occupare gran parte delle nostre giornate. Smartphone, chat, mail, facebook, tv, games, shopping, ecc...
NON IMPORTANTE
URGENTE
NON URGENTE
www.upgradeyourmind.it

Definizione

In algebra lineare, una **matrice** è una tabella ordinata di elementi.



Gli elementi di una matrice vengono in genere indicati con una coppia di indici a pedice.

Algebra lineare

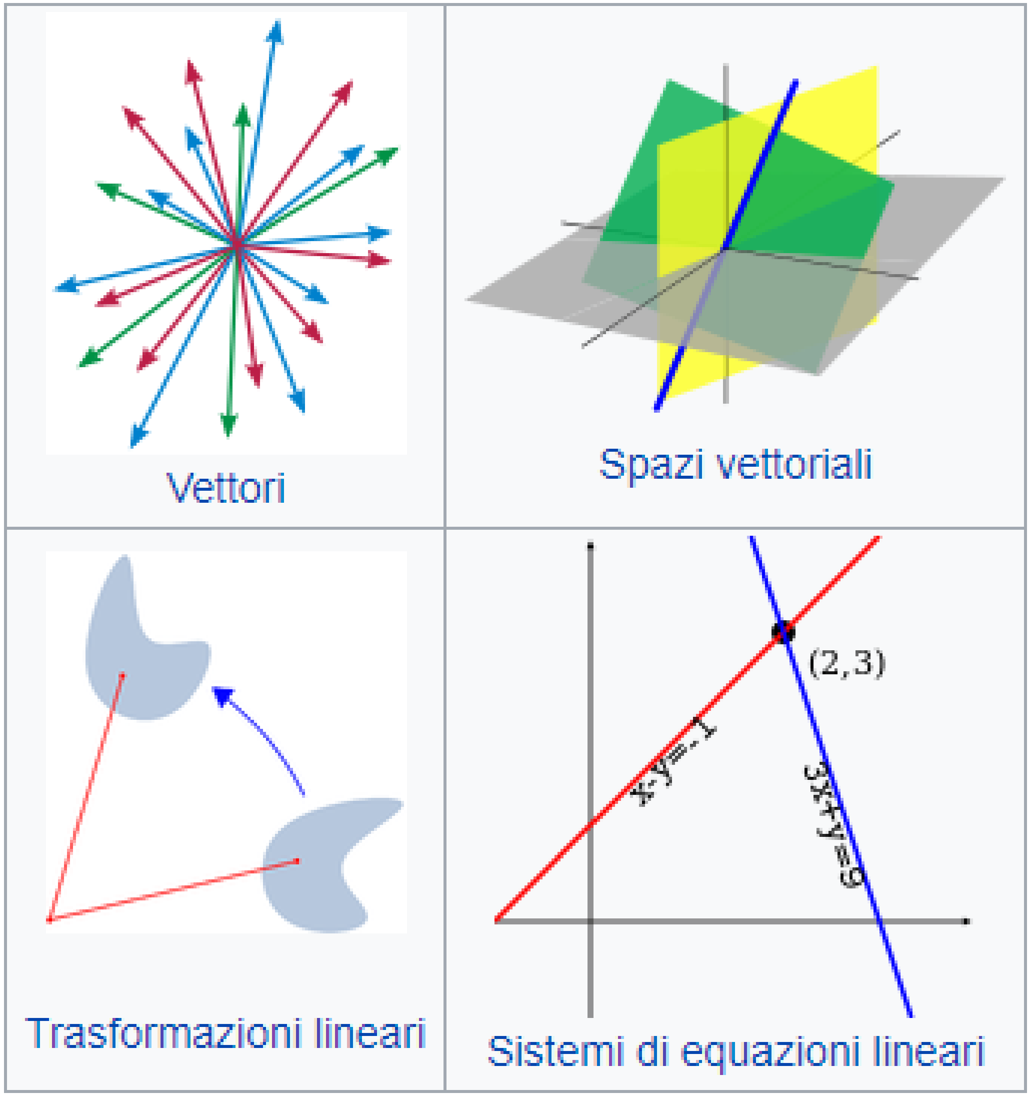
Branca della matematica che si occupa dello studio di :

vettori,

spazi vettoriali,

trasformazioni lineari,

sistemi di equazioni lineari.



Ogni elemento di una matrice A è indicato con la scrittura $a_{i,j}$ dove i indica la riga di appartenenza, mentre j indica la colonna.

Se il numero di righe è diverso da quello delle colonne, la matrice è detta rettangolare

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se numero di righe e colonne è uguale, abbiamo una matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 3 & 56 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E' possibile considerare una matrice con una sola riga

Matrice riga

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

oppure anche una matrice con una sola colonna

Matrice colonna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Matrice quadrata: caratteristiche

In una matrice quadrata la diagonale contenente gli elementi con gli stessi indici prende il nome di diagonale principale.

$$\begin{pmatrix} 3 & 56 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata è diagonale se sono nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Se in una matrice diagonale, di ordine n , gli elementi non nulli sono tutti uguali ad 1, allora si dice matrice unitaria di ordine n.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata, di ordine n , con elementi tutti nulli è detta matrice nulla di ordine n .

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare superiore

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice triangolare inferiore

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Ricapitolando

Le caratteristiche di queste matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrice trasposta

Assegnata una matrice A di ordine nxm , si definisce trasposta di A la matrice, indicata con A^T, ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Qualche informazione storica

Tracce dell'utilizzo di matrici risalgono fino ai primi secoli a.C. Nel corso della storia più volte è capitato che matematici vissuti in epoche e luoghi diversi, durante lo studio di sistemi lineari, abbiano disposto i coefficienti del sistema in forma tabellare, fatto che evidenzia come le matrici siano una struttura particolarmente intuitiva e conveniente per questi scopi. Interessanti reperti sono anche i quadrati latini e i quadrati magici.

Un **quadrato latino** è una scacchiera quadrata di lato *n* con un simbolo su ogni casella, in modo che ognuno di essi compaia una e una sola volta in ogni riga e in ogni colonna. Un quadrato latino di ordine *n* può anche essere visto come una particolare matrice $n \times n$

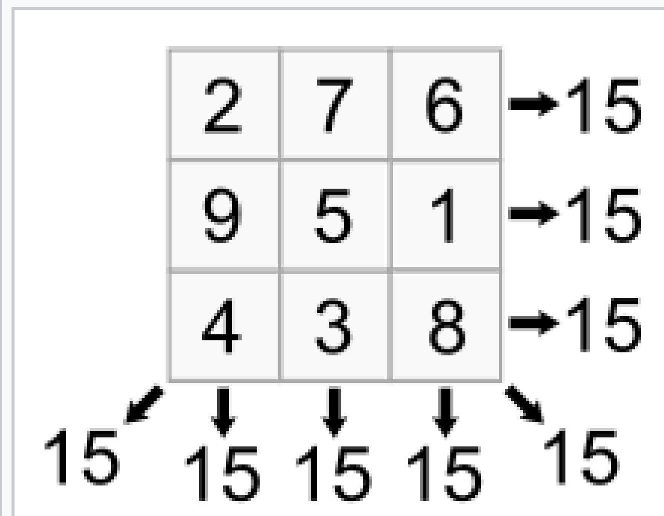
A	B	C	D	E
B	C	E	A	D
C	E	D	B	A
D	A	B	E	C
E	D	A	C	B

Un **quadrato magico** è una disposizione di numeri interi in forma di tabella quadrata in cui siano rispettate due condizioni:

-) i valori siano tutti distinti tra loro

-) la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna, e in entrambe le diagonali, dia sempre lo stesso risultato;

tale intero è denominato "costante di magia" del quadrato.



Un quadrato magico perfetto 3 × 3.
Il numero magico è 15.

I primi a sfruttare le matrici per agevolare i propri calcoli furono i matematici cinesi, proprio nell'affrontare i sistemi lineari.

Nel *Jiuzhang Suanshu* (*Nove capitoli sulle arti matematiche*) comparve anche il concetto di determinante, inteso come metodo per determinare se un sistema lineare ammette un'unica soluzione.

Un'idea più moderna di determinante fece la sua comparsa nel 1683, a distanza di poco tempo sia in Giappone , coKowa Sekia (*Method of solving the dissimulated problems*), che in Europa, con Leibniz.

Nel 1848 il matematico e avvocato inglese Sylvester introdusse per la prima volta il termine *matrice*.

Il suo collega avvocato Cayley nel 1858 fornì la prima definizione astratta di matrice, in *Memoir on the theory of matrices* (*Memorie sulla teoria delle matrici*).

A partire dalla seconda metà del XX secolo l'avvento dei computer ha dato un'impressionante accelerazione alla diffusione delle matrici e dei metodi matriciali. Grazie ai computer infatti è stato possibile applicare in maniera efficiente metodi iterativi precedentemente ritenuti troppo onerosi, portando di conseguenza allo sviluppo di nuove tecniche per la risoluzione di importanti problemi dell'algebra lineare.

Ciò a sua volta ha permesso l'introduzione delle matrici in altre discipline applicate, che grazie ad esse, hanno potuto rappresentare concetti complessi in maniera più semplice.

Determinante

Mentre una matrice è una tabella il determinante di una matrice quadrata è un numero, che descrive alcune proprietà algebriche e geometriche della matrice.

det(A) oppure |A|

Il determinante si calcola solo per le matrici quadrate.

Come si calcola

Matrice 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Il **determinante**, che indicheremo con **det A**, della suddetta matrice sarà semplicemente il **prodotto degli elementi che si trovano sulla cosiddetta diagonale principale (*a_{11}* e *a_{22}*) meno il prodotto dei termini sull'altra diagonale (*a_{12}* e *a_{21}*):**

$$det\ A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Matrice 3x3

Si possono usare vari metodi

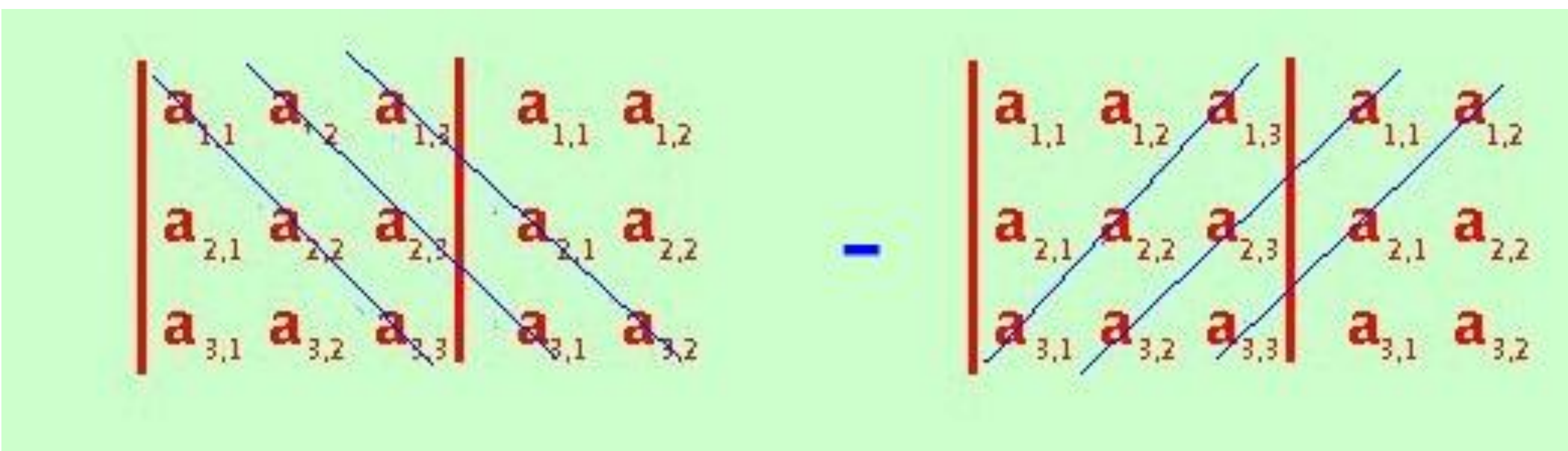
Regola di Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Riporto vicino le prime due colonne

$$\left|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{matrix}$$

Moltiplico tra loro gli elementi della diagonale principale e tra loro gli elementi delle due diagonali parallele che si sono formate e poi sottraggo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria ed anche i prodotti degli elementi per le due diagonali parallele alla secondaria



Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

riporto accanto al determinante le prime due colonne

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

Ora applico la regola di Sarrus

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right. \quad - \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$= 1\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 =$

$-2 + 1 + 2 + 1 - 1 - 4 = -3$

Metodo di Laplace

Occorre definire preventivamente cosa si intende per Complemento algebrico

Definiamo complemento $C_{h,k}$ di un elemento qualunque $a_{h,k}$ il determinante che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione.

consideriamo una matrice di ordine 4 e calcoliamo il complemento di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = C_{2,2}$$

Complemento algebrico: perché dotato di segno

In particolare se risulta:

-) $h + k$ un numero pari, allora segno positivo

-) $h + k$ un numero dispari, allora segno negativo

Ad esempio calcoliamo il complemento algebrico di $a_{2,2}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = + C_{2,2}$$

calcoliamo ora il complemento algebrico di $a_{2,3}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} = - C_{2,3}$$

Tornando al metodo di Laplace

Per le matrici 2x2

Moltiplico il primo elemento della prima riga per il suo complemento,

moltiplico il secondo elemento della prima riga per il suo complemento,

Faccio la differenza tra i due valori

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1} = a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2}$$

Matrici 3x3

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = + a_{1,1} \cdot C_{1,1} - a_{1,2} \cdot C_{1,2} + a_{1,3} \cdot C_{1,3}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1] - 2\cdot(2\cdot 2 - 1\cdot 1) + 3\cdot[2\cdot 1 -(-1)\cdot 1] =$$

$$= 1\cdot(-3) - 2\cdot 3 + 3\cdot 3 =$$

$$= -3 - 6 + 9 = 0$$

Questo metodo si può utilizzare anche per le matrici di ordine superiore.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} -1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

Regola di Cramer

Se il determinante di A è diverso da 0

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{detA}_1}{\mathrm{detA}}$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{detA}_2}{\mathrm{detA}}$$

$$x_3 = \frac{\mathrm{detA}_3}{\mathrm{detA}}$$