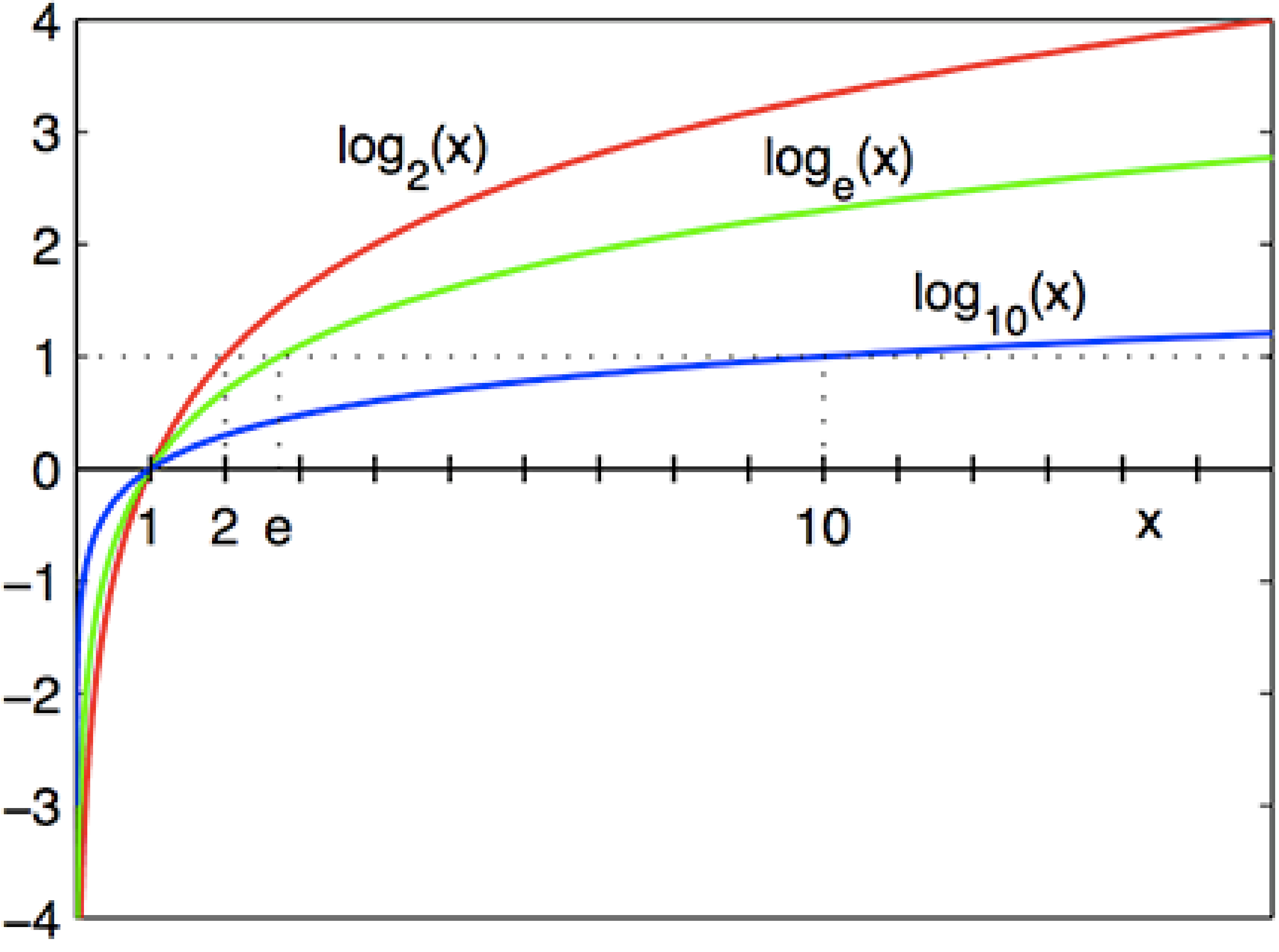
Logaritmi



Etimologia

Napier (1550-1617) illustra il metodo dei logaritmi, in un libro intitolato *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* del 1614.

L'etimologia del termine viene

unendo le radici greche

logos (discorso, ragionamento,

computo, proporzione)

e arithmos (arimetico).

Biografia di Nepero

Non era un matematico di professione, bensì un ricco proprietario terriero scozzese di nobile famiglia che riusciva a condurre i suoi poderi con efficace razionalità. Della sua vita non si hanno molte notizie e in particolare non è chiaro dove abbia potuto ricevere una buona educazione umanistica e matematica; si può solo congetturare che abbia frequentato una università europea, forse quella di Parigi.

Mirifici logarithmorum canonis descriptio

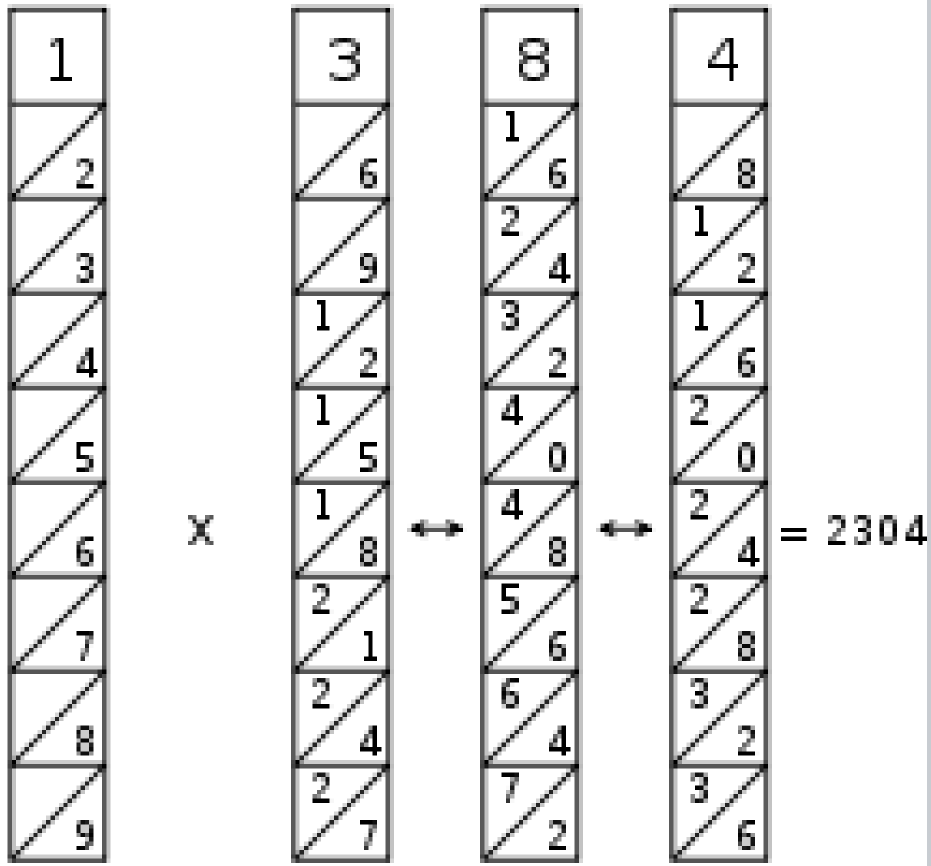
Nepero stesso ci informa di aver lavorato alla sua proposta concernente i logaritmi per venti anni.

Dedica 37 pagine alla descrizione della possibilità di utilizzare funzioni inverse di funzioni esponenziali per semplificare i calcoli che richiedono moltiplicazioni. Altre 90 pagine sono dedicate a tavole numeriche volte a facilitare i calcoli. Egli non individua un'unica funzione logaritmica, sviluppa calcoli in varie basi.

Sentiva in modo particolare la necessità di costruire un sistema che consentisse l'esecuzione di calcoli con grande velocità.

Affermava: *Eseguire calcoli è operazione difficile e lenta e spesso la noia che ne deriva è la causa principale della disaffezione che la maggioranza della gente prova nei confronti della matematica...*

Nepero inventò un dispositivo di calcolo, poi noto come *bastoncini di Nepero* o anche *ossi di Napier*, che consente di svolgere le moltiplicazioni in modo piuttosto semplice.



Moltiplicazione di 6×384 con i bastoncini di Nepero

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

Nella loro versione più semplice, i bastoncini sono asticelle, spesso costruite con avorio(da cui il loro nome più diffuso nei paesi di lingua anglosassone: *Napier's bones*, ossi di Nepero), su ciascuna delle quali sono incisi i primi multipli di un numero, con le decine e le unità divise da una barra obliqua. Accostando i bastoncini corrispondenti a diverse cifre fino a comporre un certo numero (per esempio accostando i bastoncini per il 2, il 4 e il 6 a comporre "246"), e sommando le cifre che risultano adiacenti (non separate dalla barra) nelle diverse righe, si ottiene facilmente la tabellina dei multipli del numero in questione. Quindi possono essere considerati come una *generalizzazione* della tavola pitagorica.

Più difficile

$$357 \times 249 = ?$$

	3	5	7	
$357 \times 2 = 714$	0/6	1/0	1/4	← 2
	0/9	1/5	2/1	
$357 \times 4 = 1428$	1/2	2/0	2/8	← 4
	1/5	2/5	3/5	
	1/8	3/0	4/2	
	2/1	3/5	4/9	
	2/4	4/0	5/6	
$357 \times 9 = 3213$	2/7	4/5	6/3	← 9

$$\begin{array}{l} 3213 \\ 1428 \\ \underline{714} \\ 88893 \end{array}$$

Nepero fu il primo a pubblicare un'opera sui logaritmi, ma idee molto simili erano già state sviluppate dal matematico svizzero Jobst Burgi che però pubblicò i suoi scritti 6 anni dopo. L'opera di Nepero ebbe grande influenza e in particolare sollecitò l'attività di Henry Briggs che compilò tavole estese di logaritmi nella base 10 e svolse una efficace opera di diffusione sulla pratica dei logaritmi.

- La diffusione del calcolo mediante logaritmi costituisce un fatto di grande importanza storica. Mediante i logaritmi Keplero riuscì a elaborare i dati astronomici fino alle considerazioni che gli consentirono di formulare le sue leggi, con le conseguenze sullo sviluppo dell'astronomia e della fisica che vedono in particolare le acquisizioni di Newton.
- Come Nepero aveva previsto, i calcoli mediante i logaritmi hanno consentito di ridurre vistosamente i tempi dei calcoli, fino a far dire a Laplace che Nepero aveva "raddoppiato la vita degli astronomi".
- I calcoli mediante i logaritmi hanno contribuito allo sviluppo di una mentalità quantitativa anche nelle attività tecnologiche e finanziarie e hanno avuto un'influenza molto rilevante sullo sviluppo dei commerci e delle attività imprenditoriali e sulla nascita del mondo industriale a partire dalla seconda parte del XVII secolo.

Come Nepero arriva ai logaritmi

Potrebbe essere partito dalle **progressioni geometriche**, ovvero **successioni di numeri in cui ogni termine si ottiene moltiplicando il precedente per un numero ben determinato**. In altre parole, **una progressione geometrica è una successione di numeri in cui il rapporto tra un numero e il suo precedente è sempre il medesimo**, una costante detta **ragione**. Un semplice esempio di progressione geometrica è dato da quella costituita dalle potenze di 2:

1 2 4 8 16 32….

Un altro esempio è dato da quella formata dalle potenze di 10:

1 10 100 1000 10000

Si sapeva già da tempo che sommare gli esponenti era equivalente a moltiplicare le potenze (posto che la base fosse la medesima), pertanto, andava molto bene se si volevano moltiplicare due potenze intere, per esempio, di 2 oppure di 10.
Sussistevano tuttavia ampi intervalli (spaziature) fra questi numeri, e le potenze di 2 o di 10 non sembravano di grande aiuto quando ci si trovava di fronte ad operazioni quali $63{,}389 \times 31{,}443$.

Nepero costruì una serie geometrica di ragione molto vicina a 1, cioè, al posto di 2 o di 10, utilizzò potenze di numeri simili a 1,000000001.

Le potenze successive di un numero di questo genere risultano estremamente ravvicinate e ciò è sufficiente per eliminare quelle fastidiose spaziature a cui facevamo riferimento in precedenza.
Per qualche motivo **Nepero scelse un rapporto leggermente inferiore a 1, ossia 0,9999999**.
In questo modo la sua successione geometrica "si spostava all'indietro" da un numero grande a numeri sempre più piccoli.
Egli partì da 10.000.000 e poi moltiplicò il suddetto numero per potenze successive di 0,9999999.

Questi ha considerato come base del logaritmo 0,9999999, numero equivalente all'espressione

$$1-\frac{1}{10^7}$$

In questo modo, però, **i termini della progressione delle potenze sono troppo vicini fra loro**.
Per ottenere un maggior equilibrio e per evitare fastidiose cifre decimali, Nepero moltiplicò, come già detto, **ciascuna potenza per 10.000.000 (ovvero 10^7)**.
Se

$$N=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$$

Allora **L è il "logaritmo neperiano" del numero N**.

Definizione

Il **logaritmo** di un numero in una data base è l'esponente al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso.

$$\log_a b = \text{c}$$

dove a è la base, b è l'argomento, c è il risultato

Se e solo se

$$a^c = \text{b}$$

$\log_{10} 1000 = 3 \quad \rightarrow 10^3 = 1000$

Logaritmi ed esponenziali

Appare evidente quindi il collegamento tra le due funzioni, che vengono considerate una l’inverso dell’altra.

Tale evidenza si ha anche osservandone le caratteriste e i grafici.

Prima analogia:

Nei logaritmi la base deve essere positiva e si hanno due possibilità, $0<a<1$ e $a>1$, quindi due grafici.

Grafico a>1

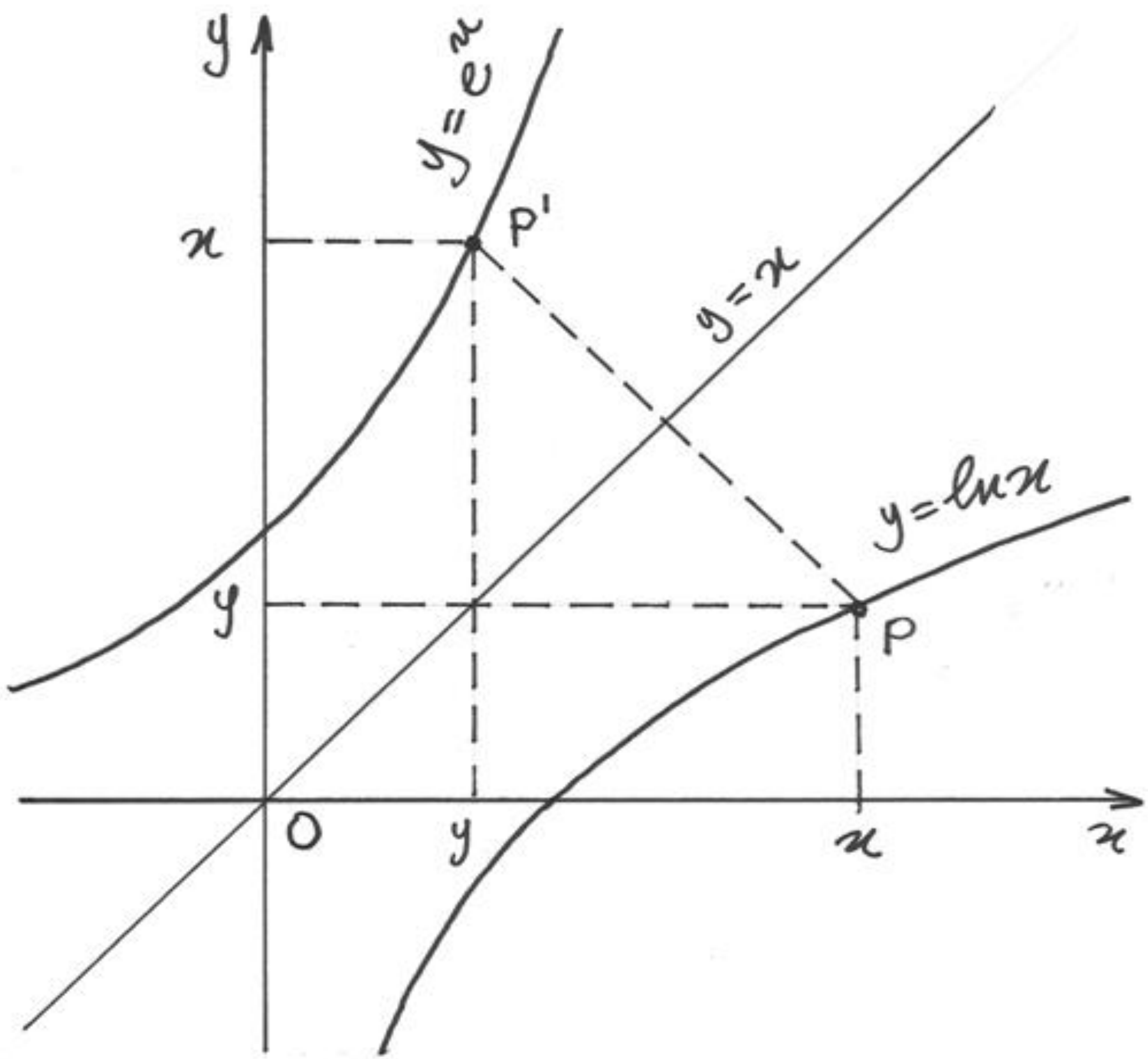
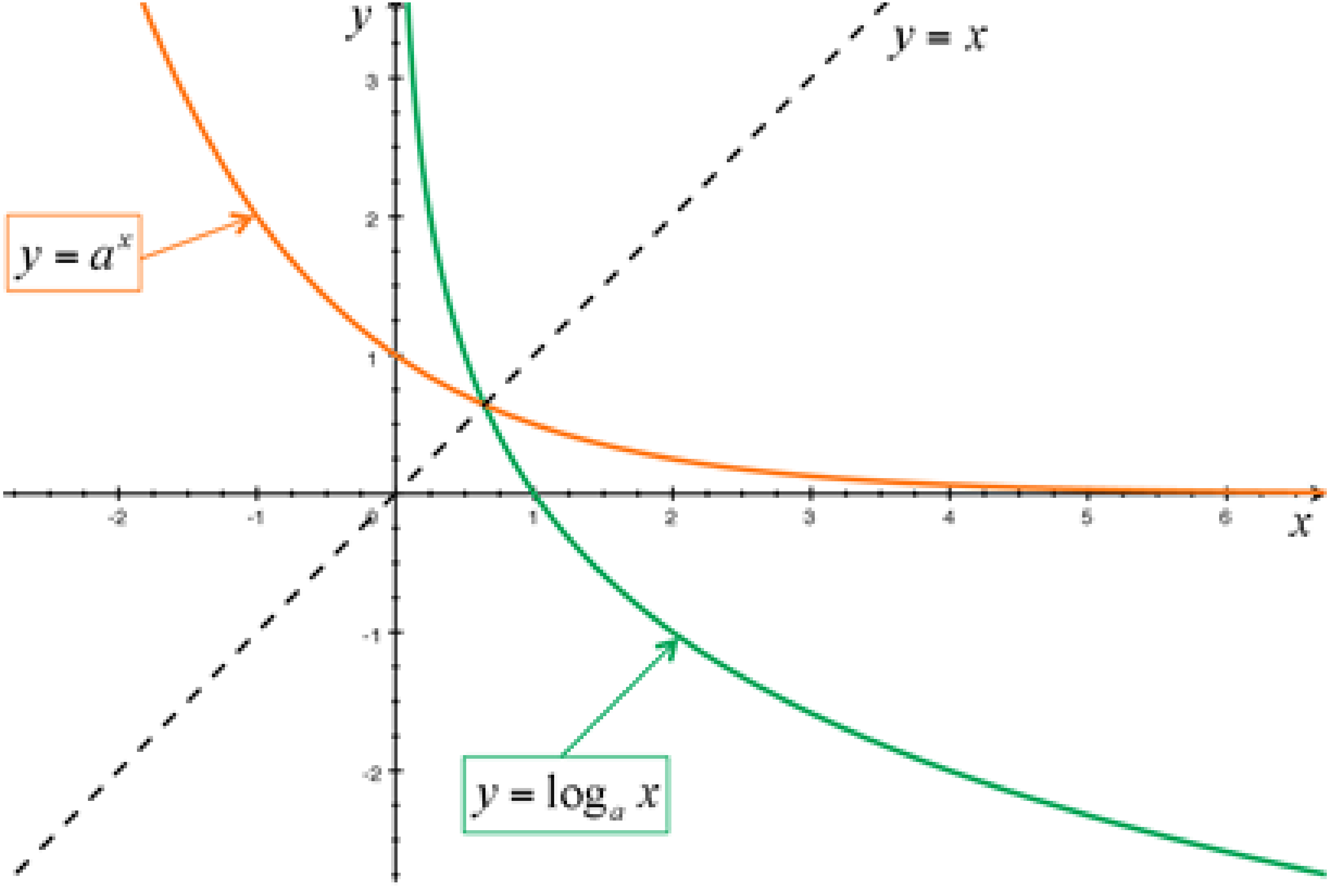
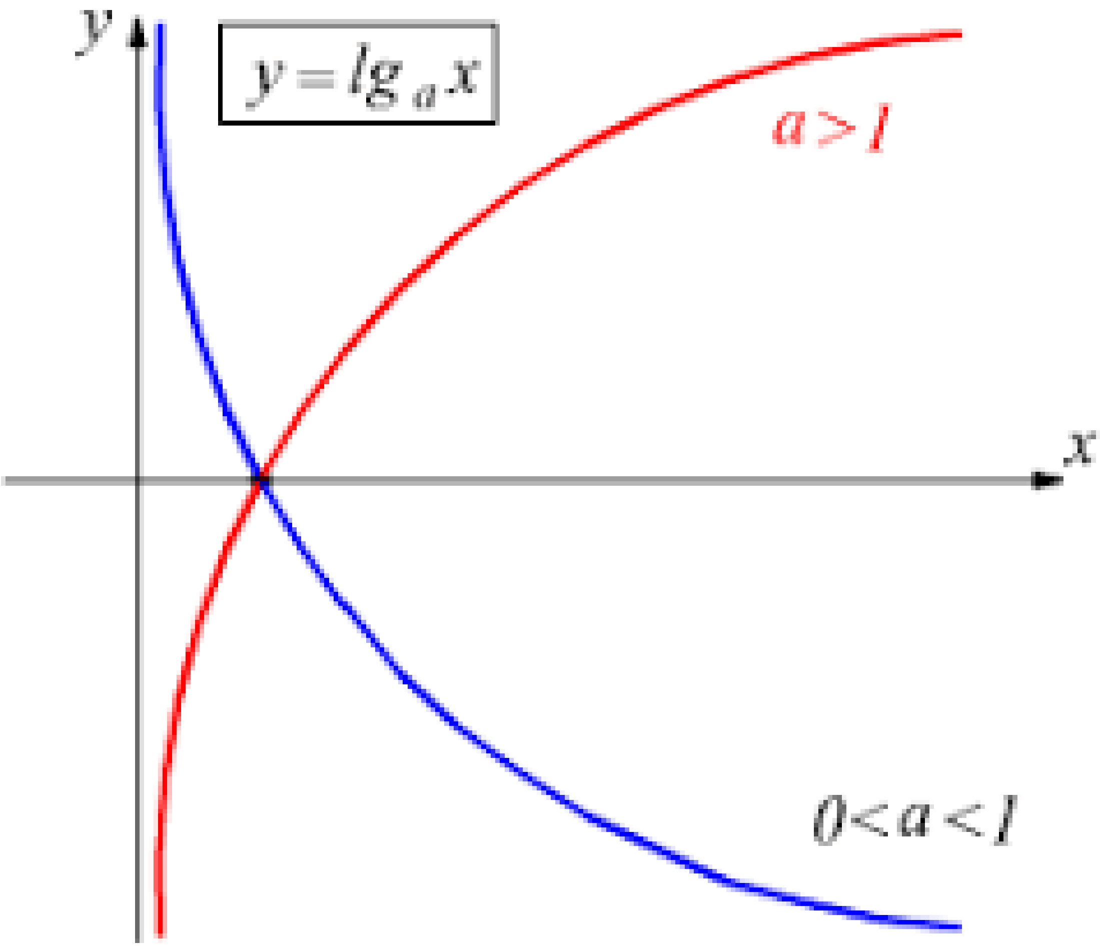


Grafico 0<a<1



I grafici dei logaritmi si ottengono da quelli degli esponenziali operando una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y=x$

Riassumendo

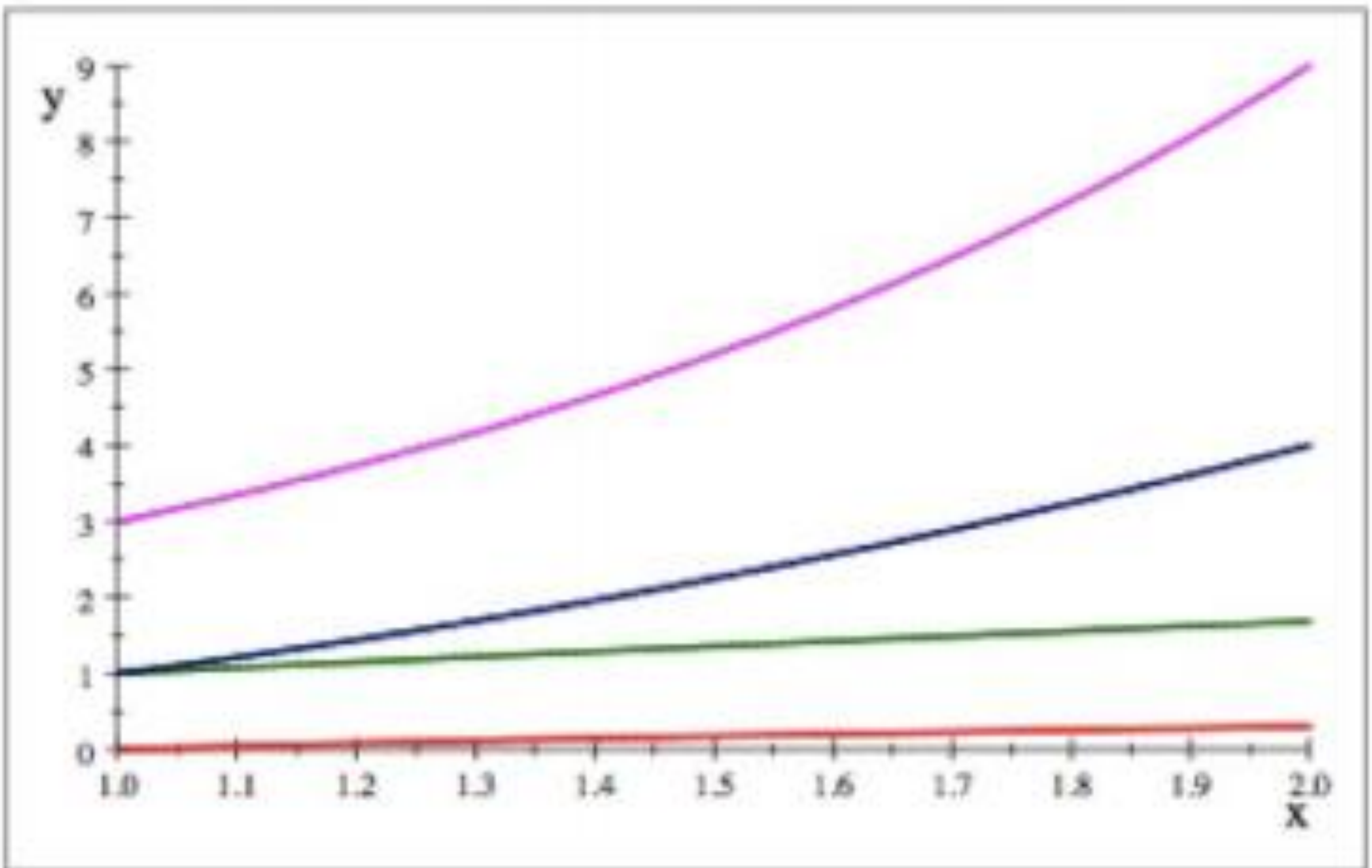


Caratteristiche

- Dominio: R^{+} , quindi la curva si trova tutta a destra dell'asse delle y
- Codominio: R, ovvero tutti i numeri reali (zero incluso) e tutte le funzioni passano per (1;0)
- L'asse delle y (x=0) è asintoto verticale per la funzione
- La funzione è crescente per a>1 e positiva per x>1,

  decrescente per 0<a<1 e positiva per 0<x<1
- E' una funzione biunivoca

Confrontiamo



$\log_{10} x$ (*rosso*), $x^{\frac{1}{2}}$ (*verde*), x^2 (*bleu*), 3^x (*rosa*)

SCHEMA PROPRIETA' DEI LOGARITMI

Proprietà dirette:

$\log_a(p \cdot q) = \log_a|p| + \log_a|q|$.

$\log_a(p/q) = \log_a|p| - \log_a|q|$.

$\log_a p^k = k\log_a |p|$.

$a>0;\ a\neq 1;\ k\in R$

o $(p>0$ e $q>0)$ opp. $(p<0$ e $q<0)$.

Proprietà inverse:

$\log_a p + \log_a q = \log_a(p \cdot q)$

$\log_a p - \log_a q = \log_a(p/q)$

$k\log_a p = \log_a p^k$.

$a>0;\ a\neq 1;\ p>0;\ q>0;\ k\in R$

Cambiamento di base

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$$

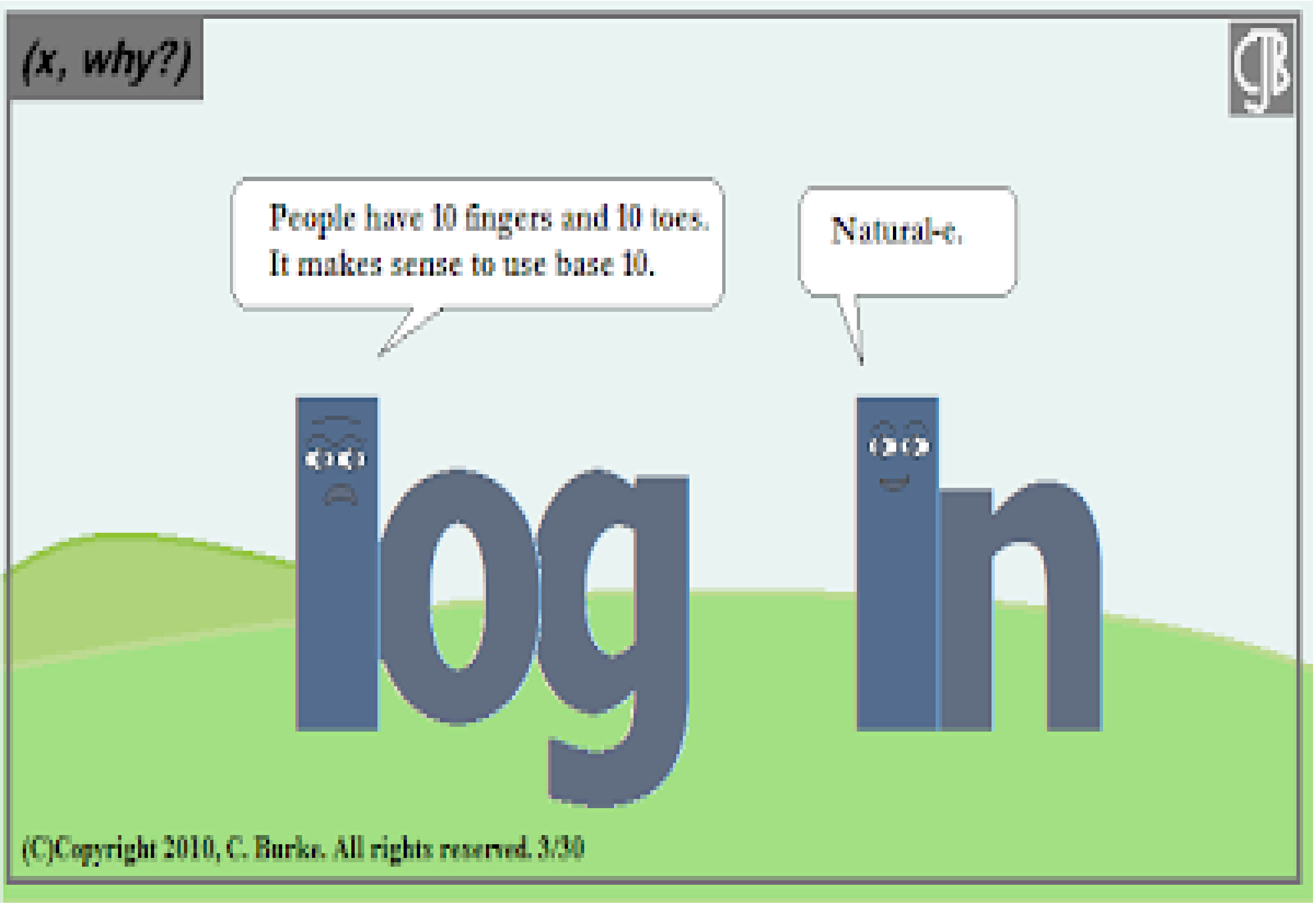
I logaritmi semplificano i conti:

Esempi:

Risolvere senza utilizzare la calcolatrice

$$\frac{9\sqrt{27}}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{27}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}}} =$$

Possiamo far diventare il tutto una somma che, decisamente, è più semplice!!!


(x, why?)
People have 10 fingers and 10 toes. It makes sense to use base 10.
Natural-e.
log
ln
(C)Copyright 2010, C. Burke. All rights reserved. 3/30

Grafici con scale logaritmiche

Quando i valori crescono o diminuiscono in maniera esponenziale, viene usata quella che viene definita "scala logaritmica".

Per esempio, un grafico che riporta il numero di hamburger venduti nel tempo da McDonald's dovrebbe iniziare con il valore 1 milione in

corrispondenza del 1955,

passare a 5 milioni l'anno successivo

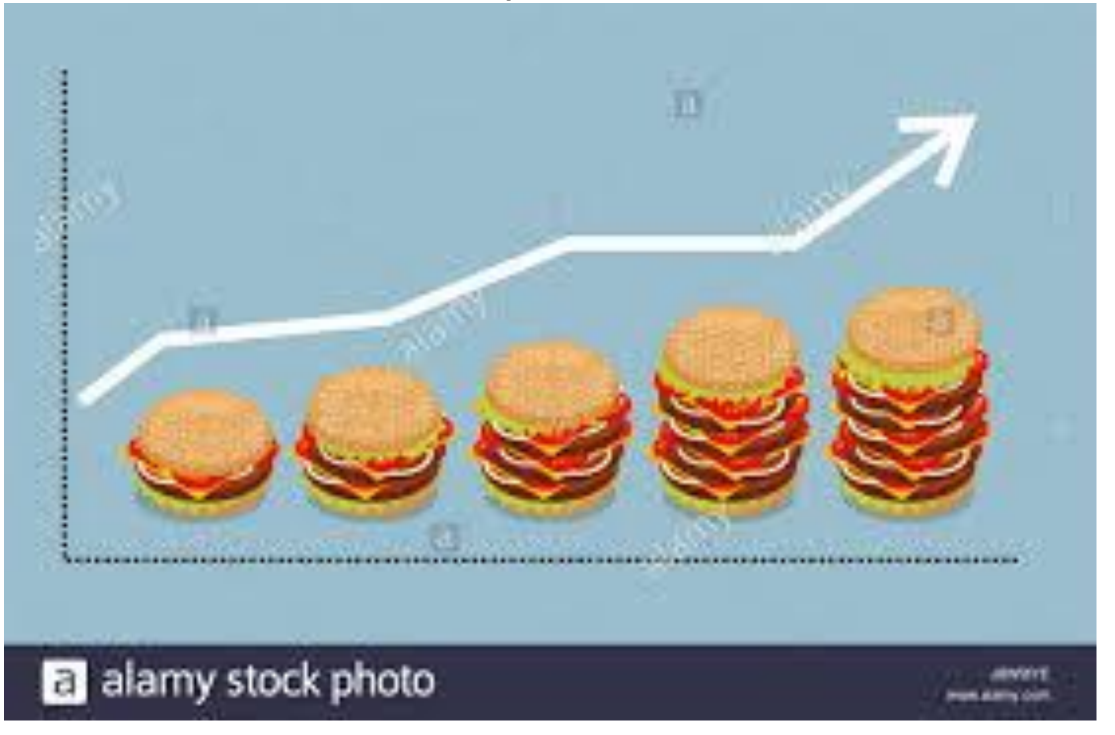
per poi raggiungere 400 milioni di

unità, 1 miliardo in meno di 10 anni

e 80 miliardi nel 1990.

Questi dati sono troppo grandi per essere rappresentati da un grafico standard, ma tutto si semplifica con una scala logaritmica.

Questo metodo sfrutta un sistema differente per mostrare i valori che non vengono distanziati gli uni dagli altri in maniera uniforme, come accade invece per le scale lineari.



Quando si utilizza una scala logaritmica i segni equidistanti rappresentano le potenze dei dati che si stanno studiando; in genere, si opta per un logaritmo in base 10 o quello naturale che è in base e .

Ogni suddivisione principale, indicata in genere con un trattino in grassetto, si chiama "intervallo".

Usando un foglio in scala logaritmica, si può notare che gli intervalli fra le unità principali non sono distribuiti in modo uniforme. Per esempio, il segno che corrisponde a 20 si trova in realtà a 1/3 della distanza che intercorre fra 10 e 100.

Le tacche degli intervalli minori si basano sul logaritmo di ciascun numero. Quindi, se 10 rappresenta il primo segno principale della scala e 100 il secondo, gli altri numeri intermedi si distribuiscono come segue: log(10)=1;

log(20)=1,3;

log(30)=1,48;

log(40)=1,60;

log(50)=1,70;

log(60)=1,78;

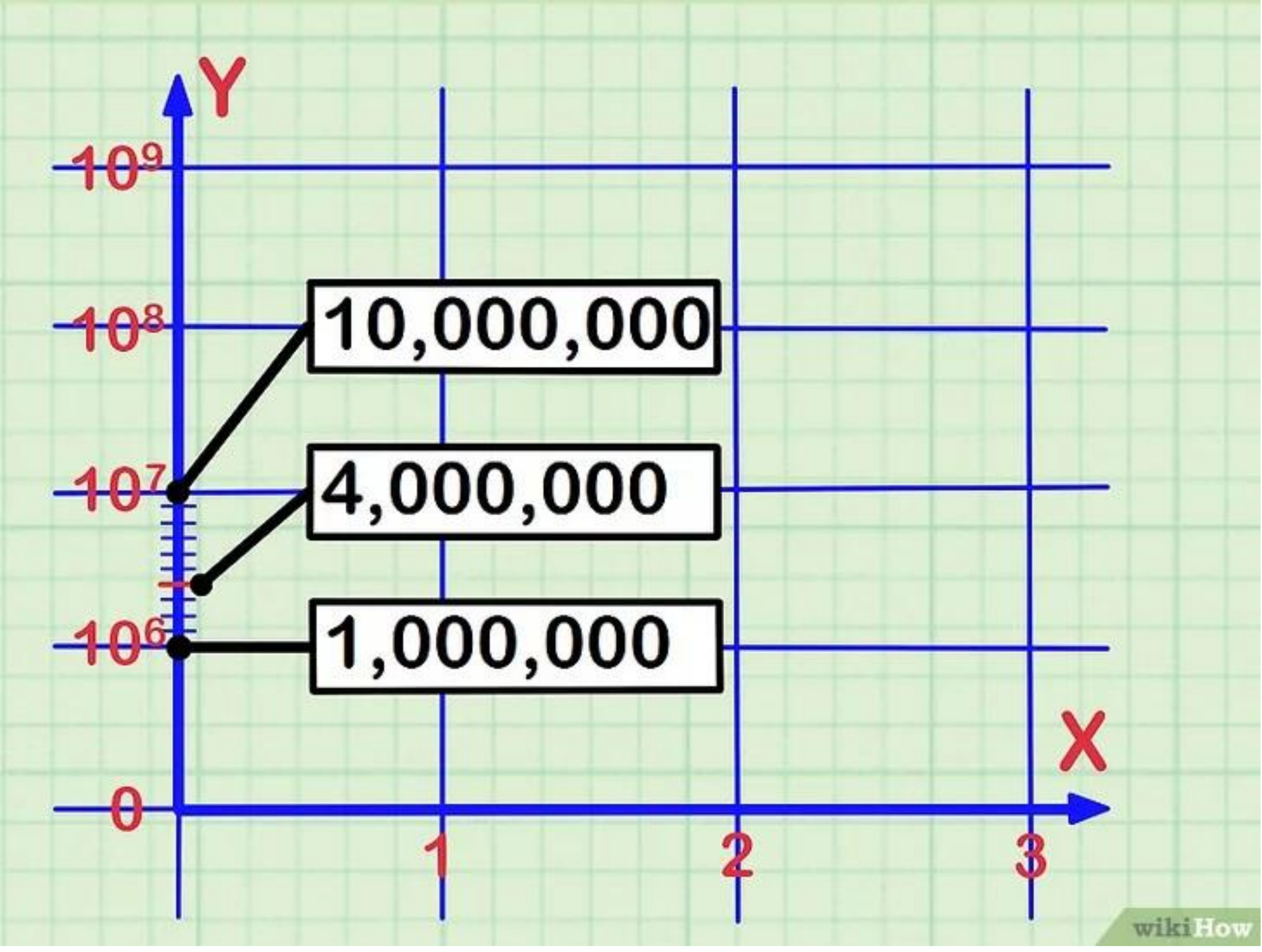
log(70)=1,85;

log(80)=1.90;

log(90)=1,95;

log(100)=2,00

Per le potenze maggiori di 10, gli intervalli minori sono distanziati rispettando le medesime proporzioni; di conseguenza, la distribuzione fra 10, 20, 30 e via dicendo è simile a quella che si utilizza per 100, 200, 300 o per 1000, 2000, 3000.

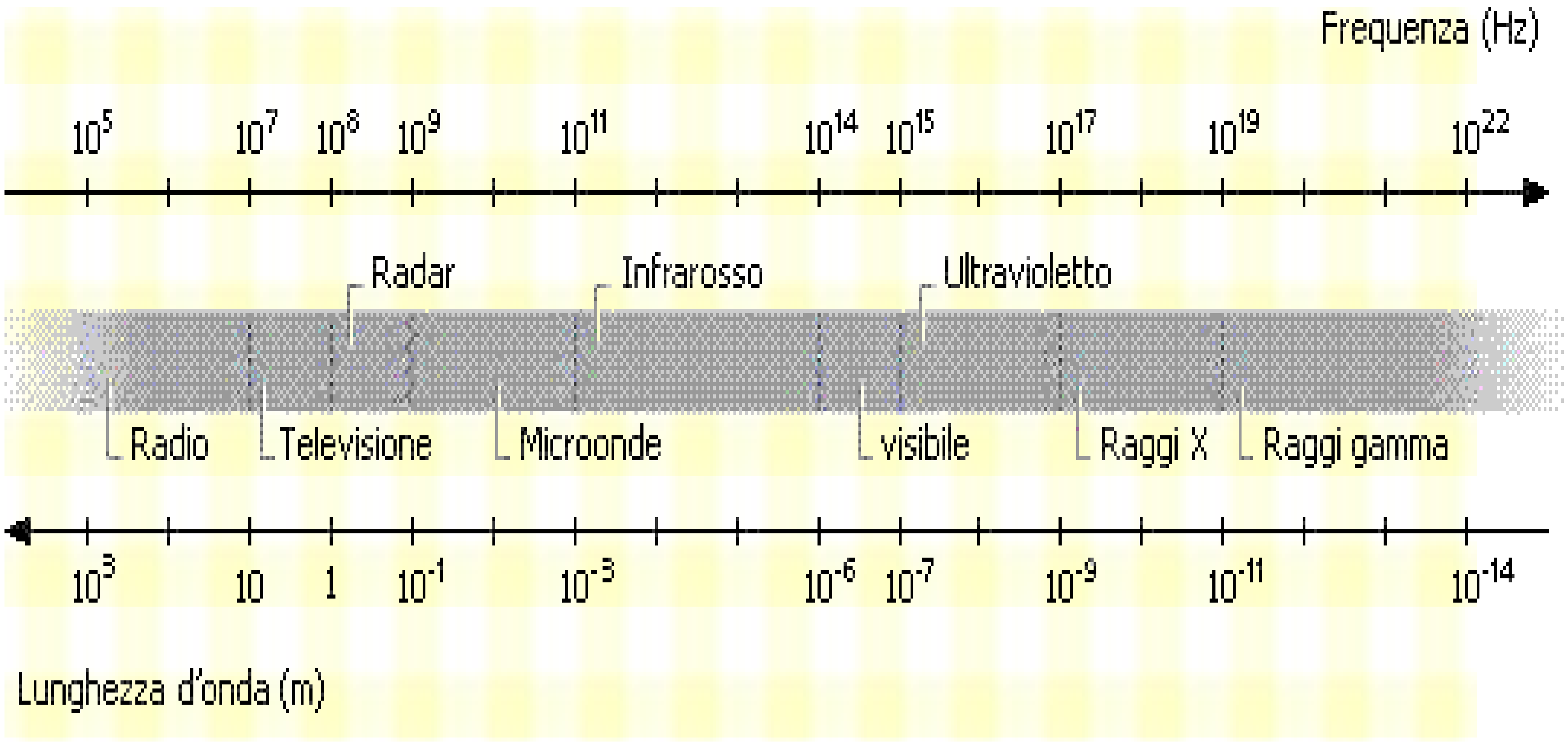


Lo **spettro elettromagnetico** varia su diversi ordini di grandezza e tutte le bande di frequenza possono essere rappresentate soltanto con l'uso di una scala logaritmica.

Ad esempio consideriamo alcune frequenze:

	frequenza	log
Onde radio	1 MHz = 10^6 Hz	6
Ottico	500 THz = $5 \cdot 10^{14}$ Hz	14,7
Ultravioletti	10 PHz = 10^{16} Hz	16
Gamma	1 YHz = 10^{24} Hz	24

Come si vede la radiazione Gamma ha una frequenza molto alta, il problema della rappresentazione grafica si risolve con una scala logaritmica: ad esempio con unità pari ad 1 cm riusciremmo a sistemare queste frequenze su un asse lungo 24 cm.



Frequenza (Hz)
10^5
10^7
10^8
10^9
10^11
10^14
10^15
10^17
10^19
10^22
Radar
Infrarosso
Ultravioletto
Radio
Televisione
Microonde
visibile
Raggi X
Raggi gamma
10^3
10
1
10^-1
10^-3
10^-6
10^-7
10^-9
10^-11
10^-14
Lunghezza d'onda (m)

In **sismologia** per descrivere gli effetti di un terremoto si usa la scala Richter, in base alla quale si calcola la magnitudo del terremoto con la formula:

$$M = \frac{2}{3}\, log \frac{E}{E_0}$$

dove

E, in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto

E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto.

In **acustica** l’intensità fisica del suono si misura in W/m^2, ma esiste anche una intensità fisiologica del suono misurata in decibel (dB) e per passare da una misurazione all’altra si utilizza una formula logaritmica. Assunto convenzionalmente come intensità di riferimento il valore $I_0 = 10^{-12}$ watt/cm^2 (soglia di udibilità dell’orecchio umano), la misura in decibel del livello dell’intensità sonora I è data da: $10 log \frac{I}{I_0}$

Possiamo quindi dire che il rapporto fra l'intensità sonora (espressa in W/m^2) di un concerto rock e quella di una normale conversazione è di

1 000 000:1, o di 6 bel, o di 60 dB.