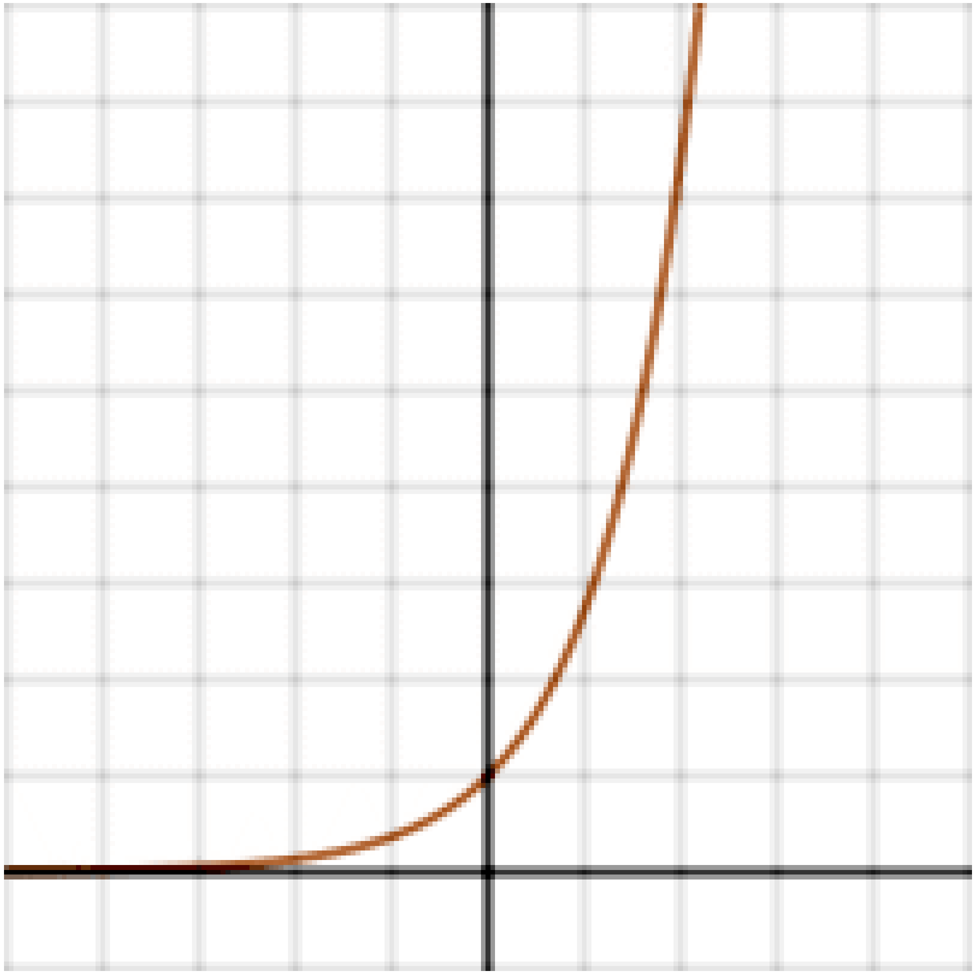
Esponenziali



I chicchi di riso

Il numero totale di chicchi è

2^{64}-1

Perché le caselle sono 64

Generalizzando, se le caselle fossero n avremmo

2^{n}-1 (numero primo di Mersenne collegato con i numeri perfetti, cioè quei numeri che corrispondono alla somma dei loro divisori   28….)

y = 2^{n} è la funzione esponenziale con base 2

Una **funzione esponenziale** per **definizione** è una **funzione** data da una potenza in cui la base è costante e l'esponente è variabile.

y= a^{x}

La base *a* deve essere:

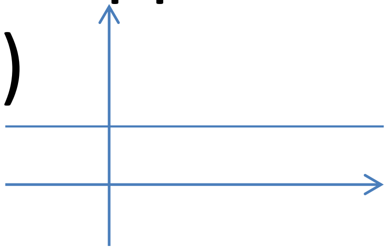
Un numero positivo ($a>0$) che può assumere i valori:

$0<a<1$

$a=1$

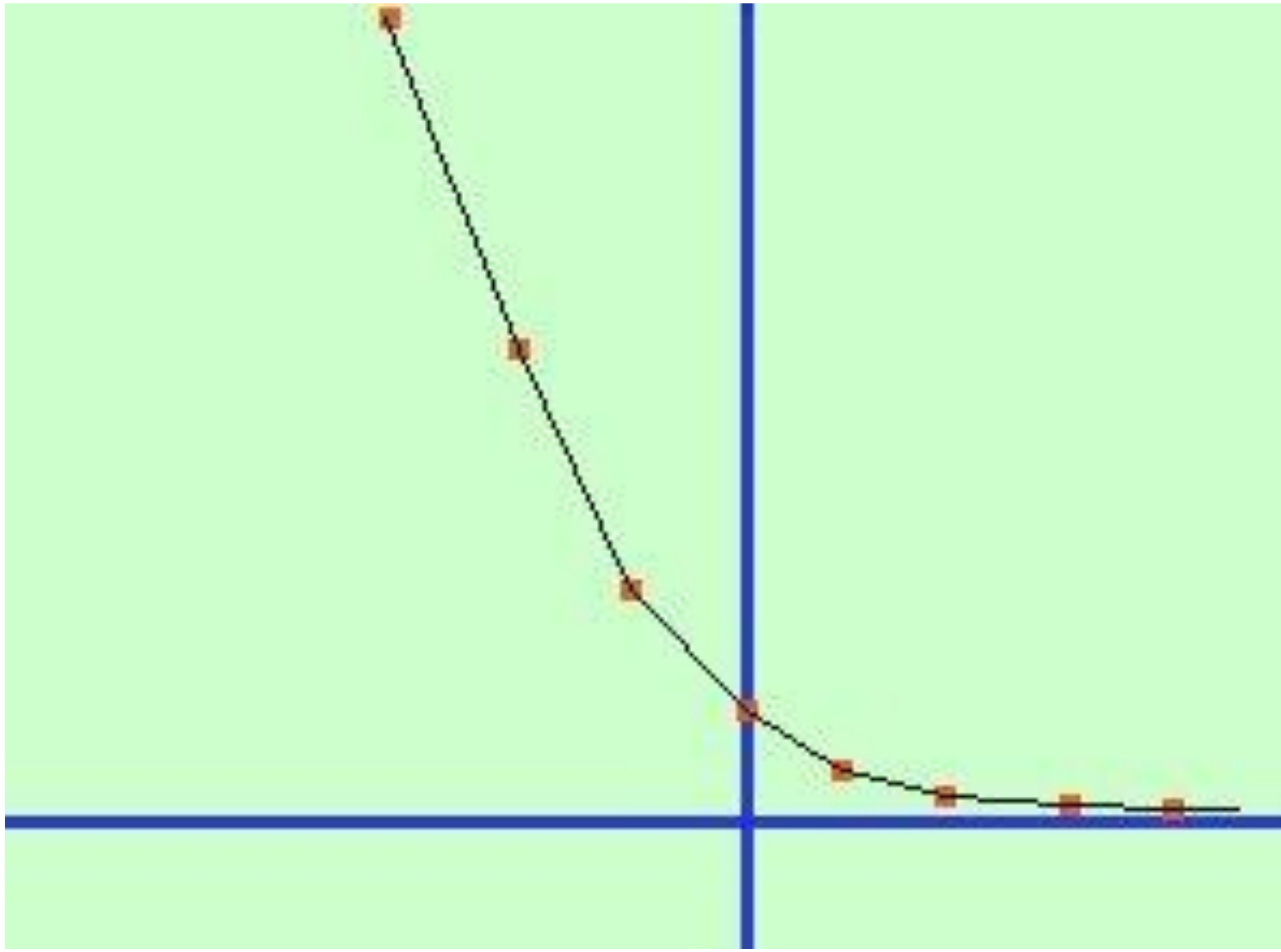
$a>1$

Nel caso particolare di $a=1$ abbiamo una funzione costante rappresentata da una retta passante per (0;1)



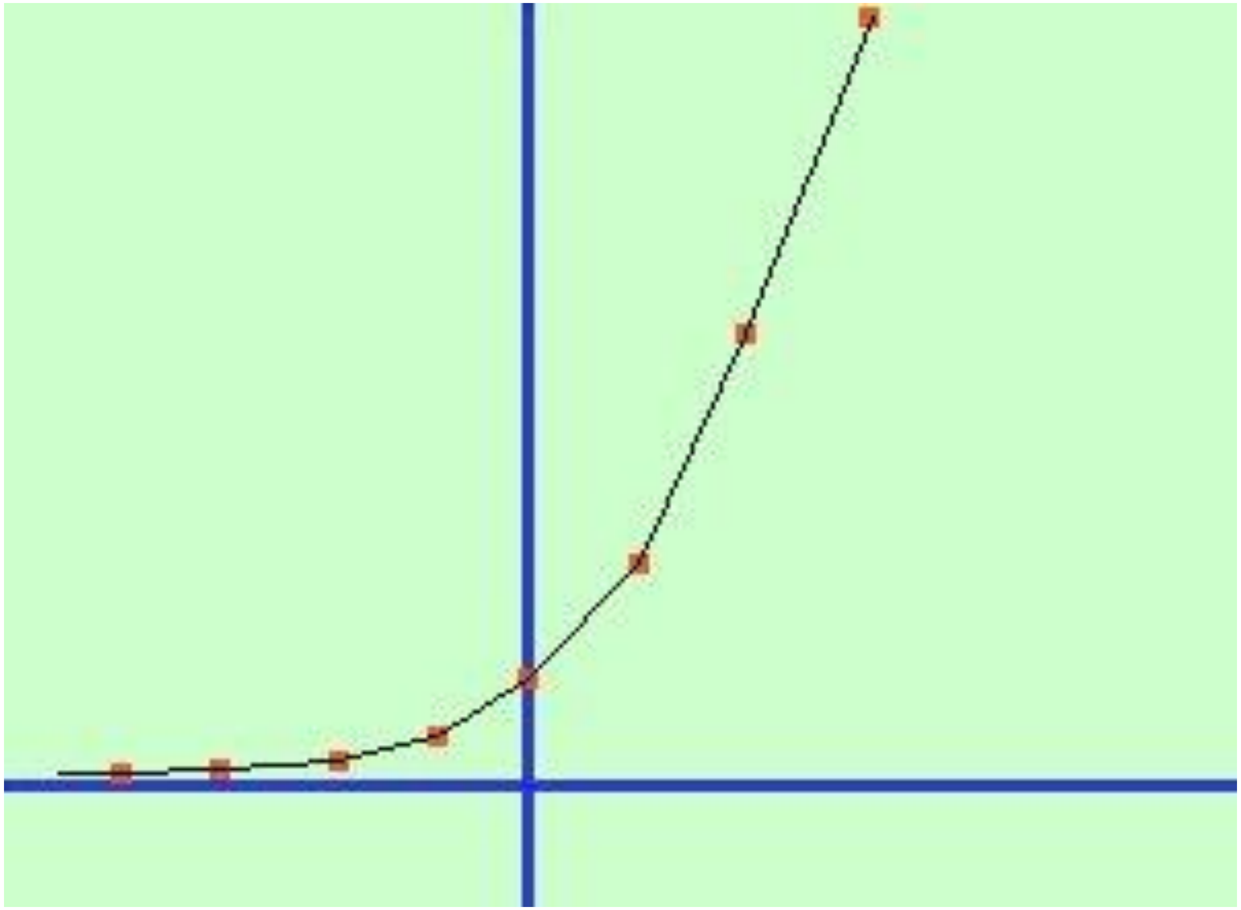
$0<a<1 \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

x	y
0	1
1	½
2	¼
3	1/8
-1	2
-2	4
-3	8

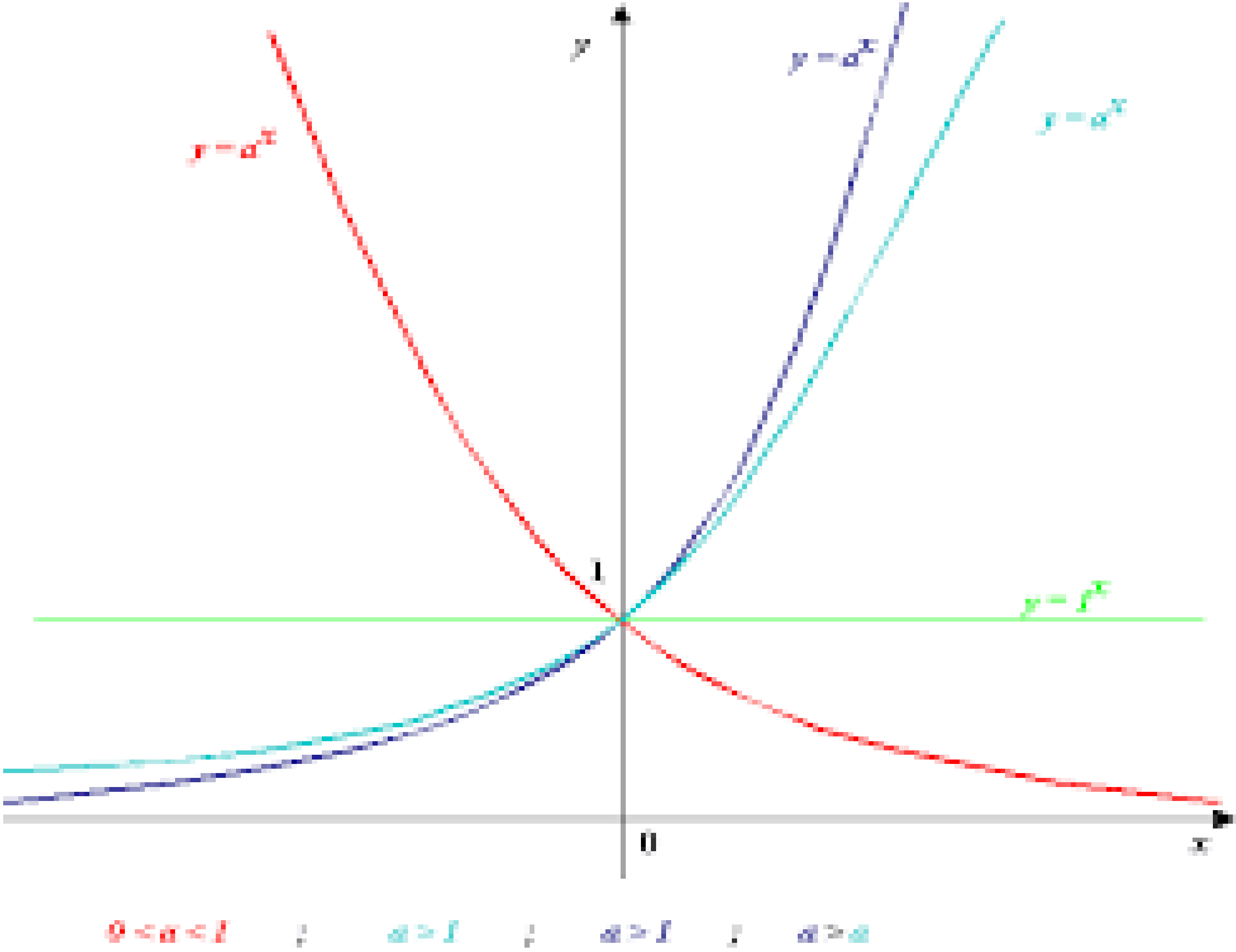


a>1 $y=2^x$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8



In generale



Caratteristiche della funzione esponenziale

Dominio: R

Codominio: R^+

Funzione biunivoca

Passa sempre per (0;1)

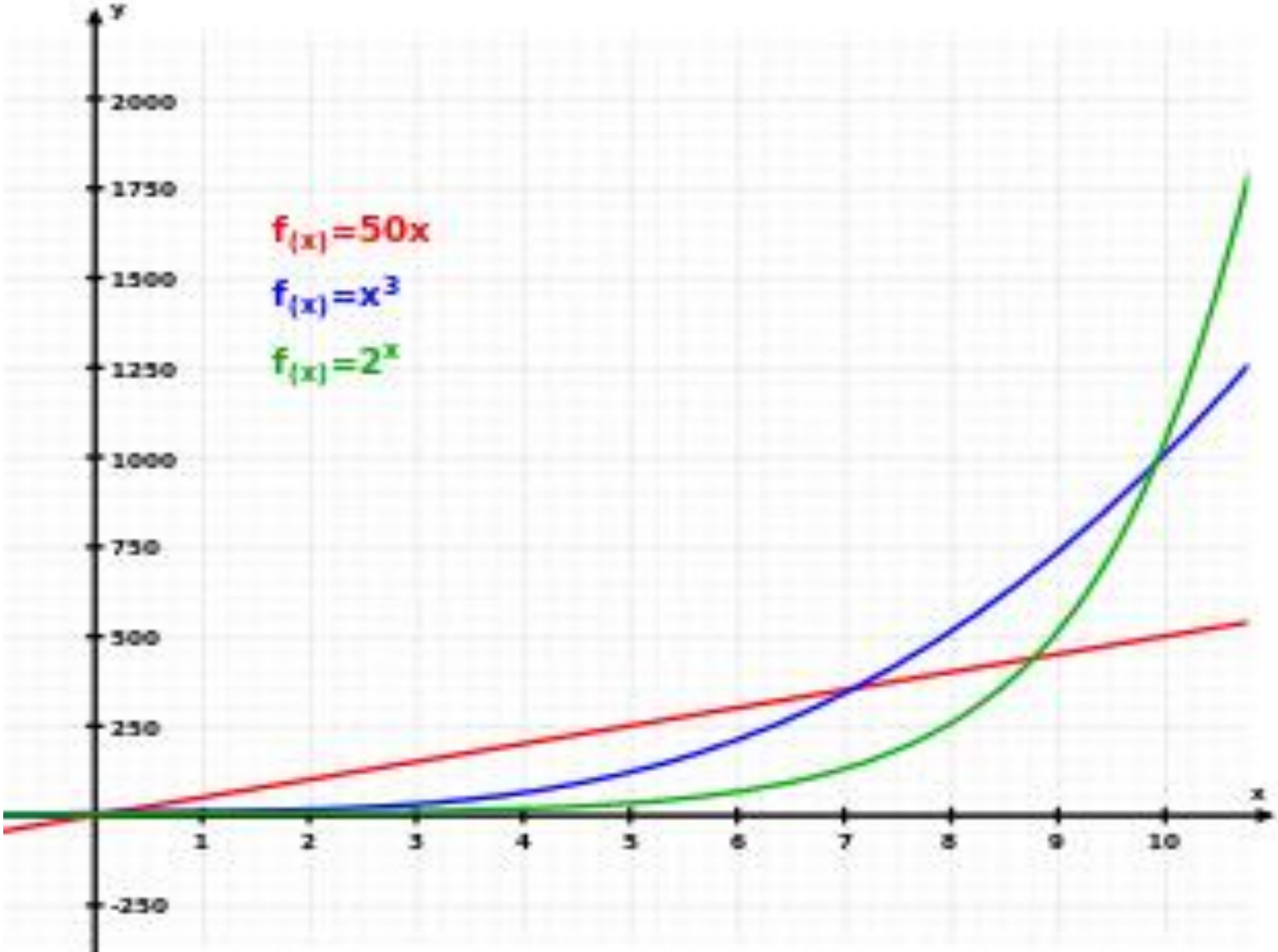
Asse delle x (cioè y=0) è asintoto orizzontale

Sempre positiva

Crescente per a>1

Decrescente per 0<a<1

Crescita esponenziale



y= e^x

La base e viene spesso usata per le funzioni esponenziali.

e = un numero trascendente il cui valore è approssimativamente 2.7182818284……….

Quindi si lavora con base maggiore di 1.

Questo numero si può ricavare proprio considerando le applicazioni della funzione esponenziale.

Jacob Bernoulli e il problema degli interessi composti

interesse semplice: quello che si ritira al termine dell’unità di tempo pattuita

Esempio

Se il primo gennaio ho sul conto 100 euro a un tasso netto dell’1%, a fine anno mi ritrovo 101 euro *interesse composto* è quello che invece di essere pagato (o riscosso) va ad aggiungersi al capitale, divenendo anch’esso produttivo di interesse (in altri termini, anche l’interesse genera interesse).

Esempio

L’euro in più va ad aggiungersi al capitale e, se le condizioni non mutano, alla fine del secondo anno non avrò 102 euro, ma 102 euro e 1 centesimo dove il centesimo rappresenta l’1% dell’euro maturato dopo il primo anno.

Formula C_n=$C_0(1+r)^n$

Dove n indica il numero di anni che si considerano

r è il tasso d’interesse annuo

C_0 è il capitale iniziale

C_n è il capitale finale

Perché?

r C_0 è l'interesse dopo il primo anno

C_1= C_0 + r C_0 = C_0(1+r)

Nel secondo anno l'interesse va calcolato su C_1

C_1r = C_0(1+r) r

C_2= C_1+ C_1r = C_0(1+r)+ C_0(1+r) r =C_0(1+r) (1+r)=

$$C_0(1+r)^2$$

E se invece di un anno si avesse l'interesse ogni 6 mesi?

Se l'interesse annuo fosse del 100%, ma venisse corrisposto ogni sei mesi , allora diventerebbe del 50% ogni volta

Se l'anno viene frazionato in n parti uguali, in ognuna di esse verrà corrisposto $\frac{100}{n}\% = \frac{\frac{100}{n}}{100} = \frac{1}{n}$

Quindi, per un capitale di 1, si avrà

$C_n = (1+\frac{1}{n})^n$

Calcolando $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ Numero di Nepero

Applicazioni della funzione esponenziale

Crescita batterica

La maggior parte dei batteri si riproduce con il meccanismo della scissione cellulare, cioè la mitosi.

Una volta raggiuta una dimensione opportuna, il batterio si divide in due cellule identiche di massa pari a circa la metà di quella originaria. A loro volta le due cellule figlie crescono e poi si dividono ognuna in altre due.

In media il tempo necessario per la divisione di una cellula batterica richiede da 1 a 3 ore, ma in condizioni favorevoli possono essere sufficienti 20 minuti.

Da un punto di vista matematico le grandezze in gioco sono:

- la velocità di formazione delle cellule o tasso di crescita, che rappresenta il numero di duplicazioni contemporanee n di una determinata specie in un tempo t stabilito;
- tempo di generazione, intervallo di tempo entro il quale la cellula batterica dà luogo alla sua divisione in due cellule, tempo caratteristico della specie e delle condizioni colturali

N di cellule: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow ......$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad .....$

In generale, se N_0 *rappresenta il numero iniziale di cellule, si avrà una legge del tipo:*

$$N = N_0 2^n$$

Esplosone demografica

Si riferisce all'aumento esponenziale della popolazione umana durante gli ultimi decenni. L'aumento globale della popolazione è correlato all'aumento della densità di popolazione nelle specifiche aree del pianeta.

La *densità di popolazione*, solitamente espressa in individui per chilometro quadrato, è un dato piuttosto ambiguo. Se l'area cui ci si riferisce non ha una connotazione amministrativa o sociale, la media che risulta non ha molto senso. Le densità di popolazione di una città, una regione, o uno Stato sono dati interessanti perché consentono una pianificazione delle risorse.

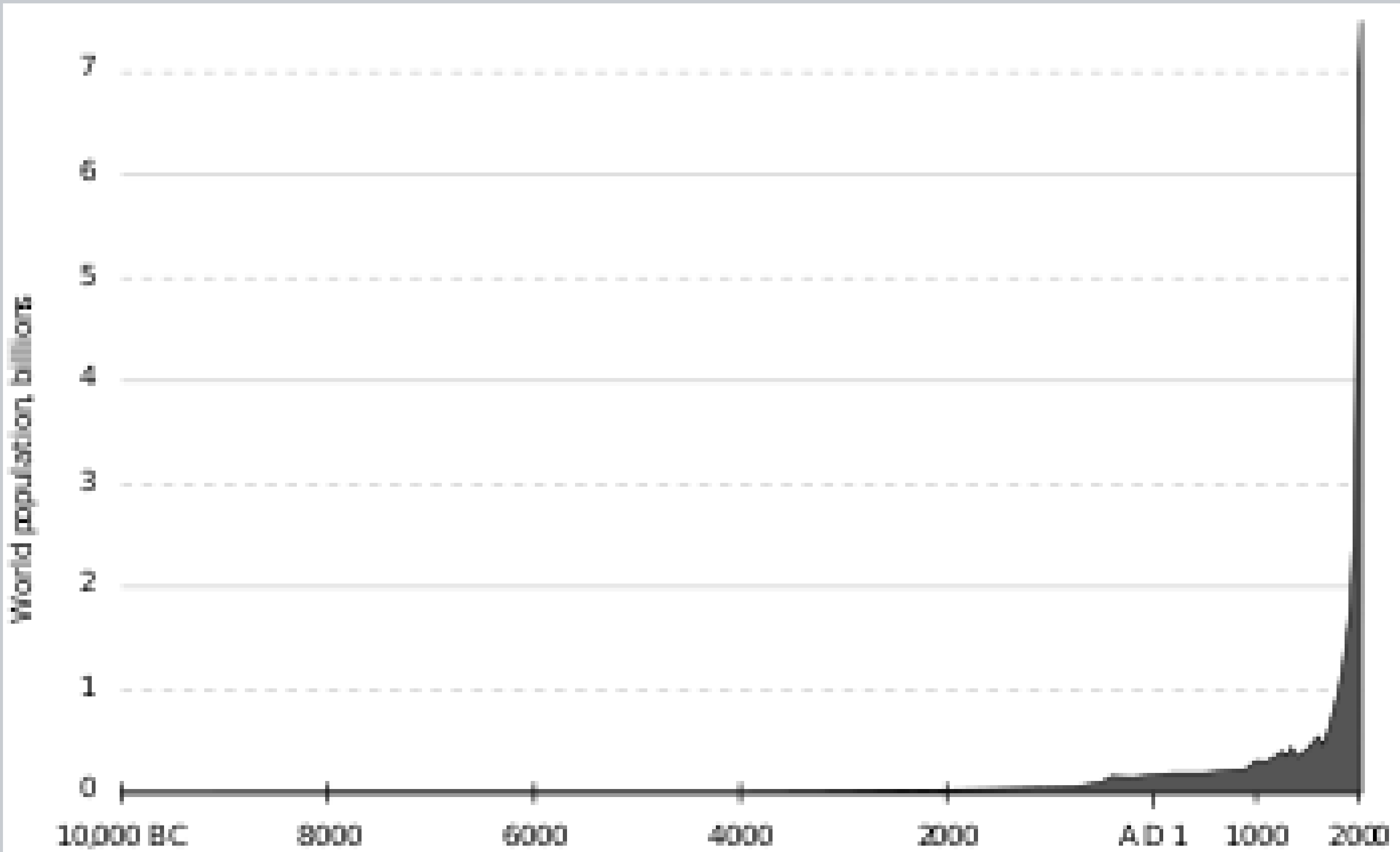
La crescita della popolazione è stata studiata sperimentalmente su specie diverse da quella umana. Per specie contraddistinte da una successione discreta di generazioni, tipicamente una nuova generazione ogni anno, risulta più facile calcolare il numero di nuovi nati in funzione del numero corrente di individui fertili. Quest'approccio moltiplicativo conduce ad una crescita che è letteralmente *esponenziale*, secondo il modello ispirato da Malthus .

P(t)= $P_0\, e^{rt}$

dove P_0 = popolazione iniziale,

r = tasso intrinseco di accrescimento = tasso di natalità - tasso di mortalità,

t = tempo.



Aumento della popolazione 10 000 a.C. – 2000 d.C.

Fisica

Il crollo a valanga all'interno di un materiale dielettrico. Un elettrone libero diventa sufficientemente accelerato da un campo elettrico applicato esternamente da liberare elettroni aggiuntivi mentre collide con gli atomi o le molecole del mezzo dielettrico. Anche questi elettroni *secondari* sono accelerati, creando numeri più grandi di elettroni liberi. La crescita esponenziale risultante di elettroni e ioni può rapidamente condurre al completo crollo dielettrico del materiale.

Equazioni esponenziali

Per risolvere calcoli, come ad esempio le equazioni o disequazioni, con gli esponenziali, si ricorre alle proprietà delle potenze.

Esempio

$2^{3x} = 16$

$16 = 2^4$

Quindi $2^{3x} = 2^4$ $\quad$ $x = \frac{4}{3}$

Concludiamo

Una ninfea cade in un lago. Ogni giorno raddoppia la sua superficie e in 100 giorni copre tutta la superficie del lago. Quanti giorni ha impiegato per coprire la metà del lago?